Spezielle Relativitätstheorie

Kinematik
der
Speziellen Relativitätstheorie

Kinematik

- Teilgebiet der Mechanik

- Lehre von der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum

- Beschriebene Größen:
  - der Weg,
  - die Geschwindigkeit und
  - die Beschleunigung.

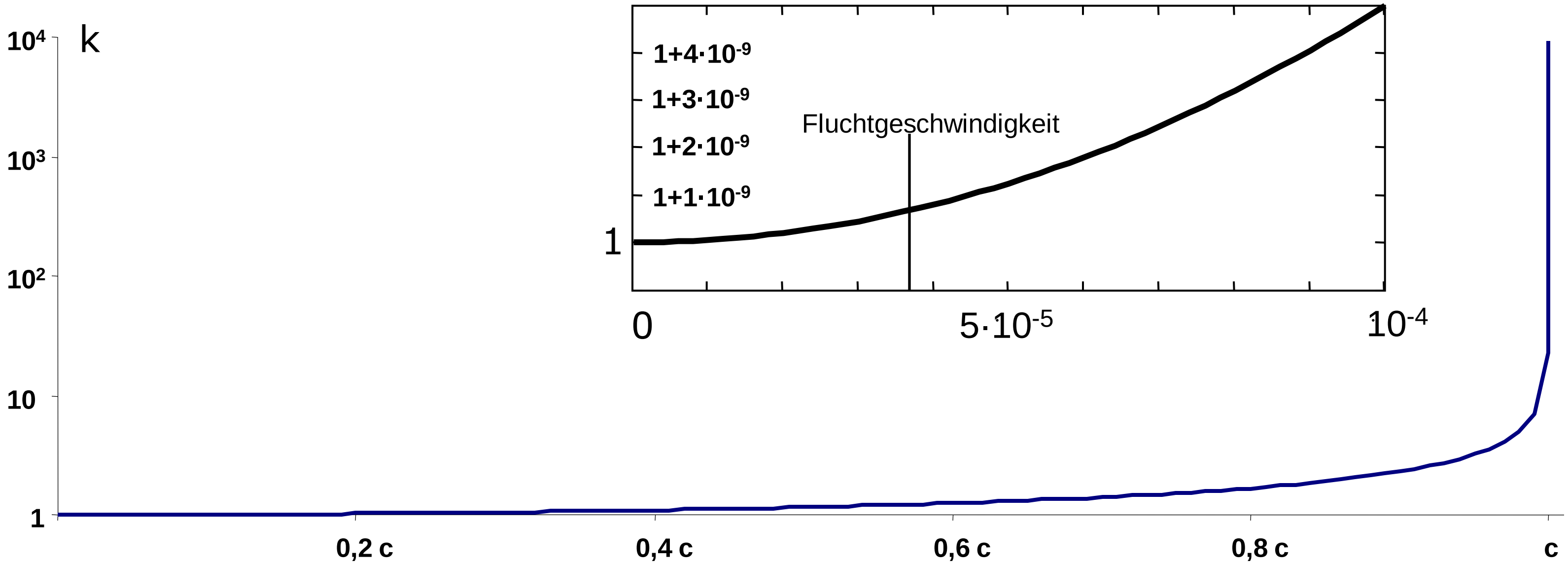
- Keine Berücksichtigung der Ursache von Bewegung z.B. durch Kräfte.

Anschaulichkeit der Relativitätstheorie

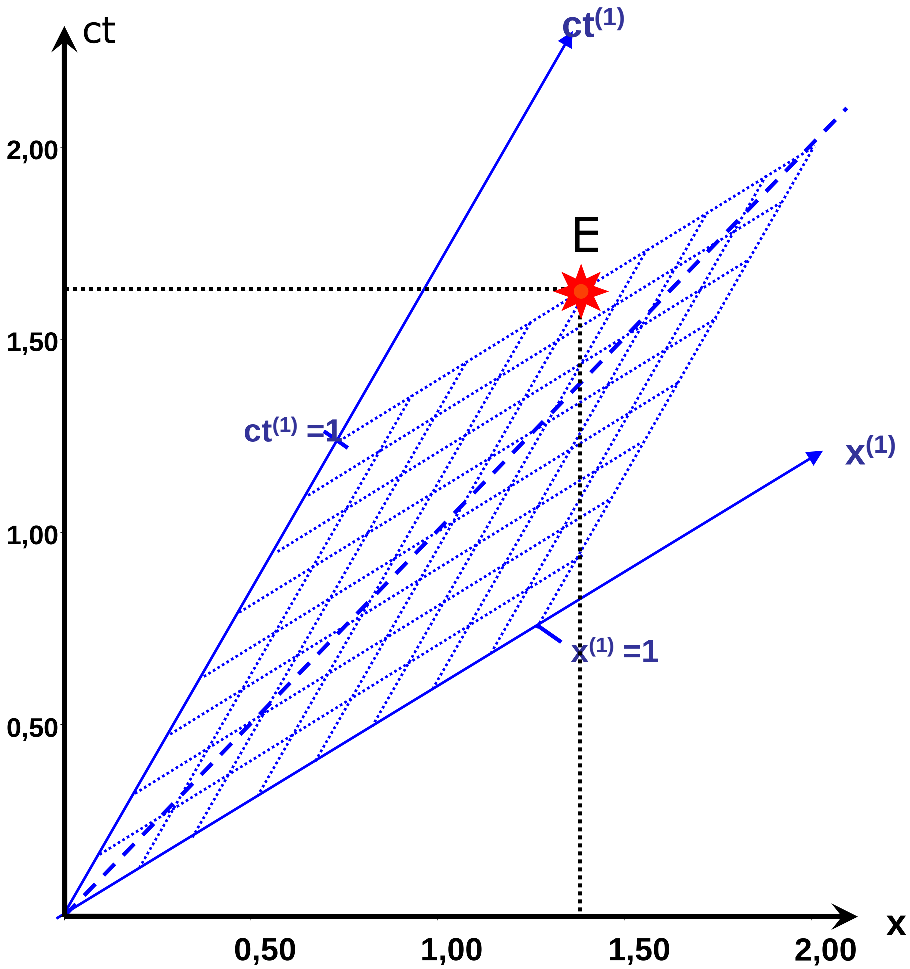
- Unsere Anschauung ist evolutionär geprägt durch den „Mesokosmos", die Welt der mittleren Dimensionen
  - Längenbereiche von Millimeter bis Kilometer
  - Zeiten von Zehntelsekunden bis Jahrzehnten
  - Geschwindigkeiten von Null bis einige Meter pro Sekunde
- Die Unanschaulichkeit der Relativitätstheorie rührt nicht in erster Linie aus dem großen Wert der Lichtgeschwindigkeit, sondern aus deren *Grenzcharakter* her.
- In der klassischen Physik hielt man sog. instantane Lichtsignale (nach Einstein „Momentansignale") für möglich; darauf beruht ja die Galilei-Transformation.

k-Faktor in Abhängigkeit von v

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots$$



Veranschaulichung S und $S^{(1)}$



Koordinaten des Events E im System S:

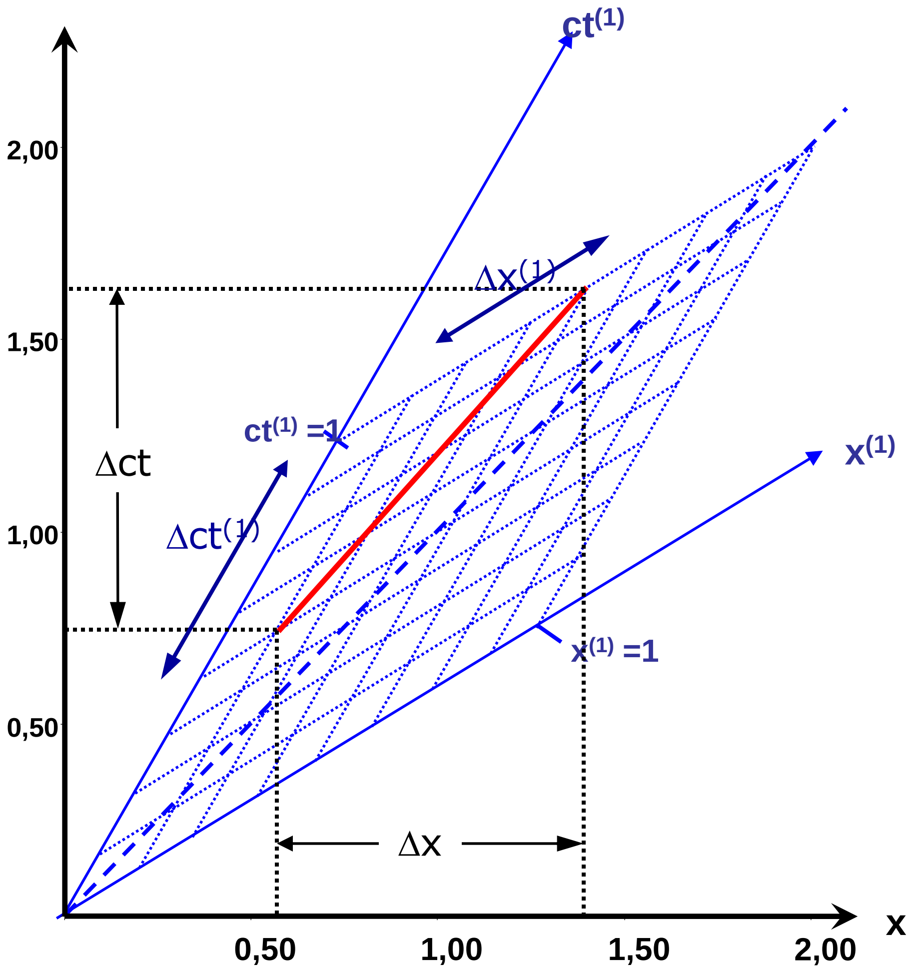
$x = 1{,}4$
$ct = 1{,}65$

Koordinaten des Events E im System $S^{(1)}$:

$x^{(1)} = 0{,}5$
$ct^{(1)} = 1$

Der F-Wert ist aber in beiden Systemen gleich!

Veranschaulichung S und $S^{(1)}$



Der „Beobachter“

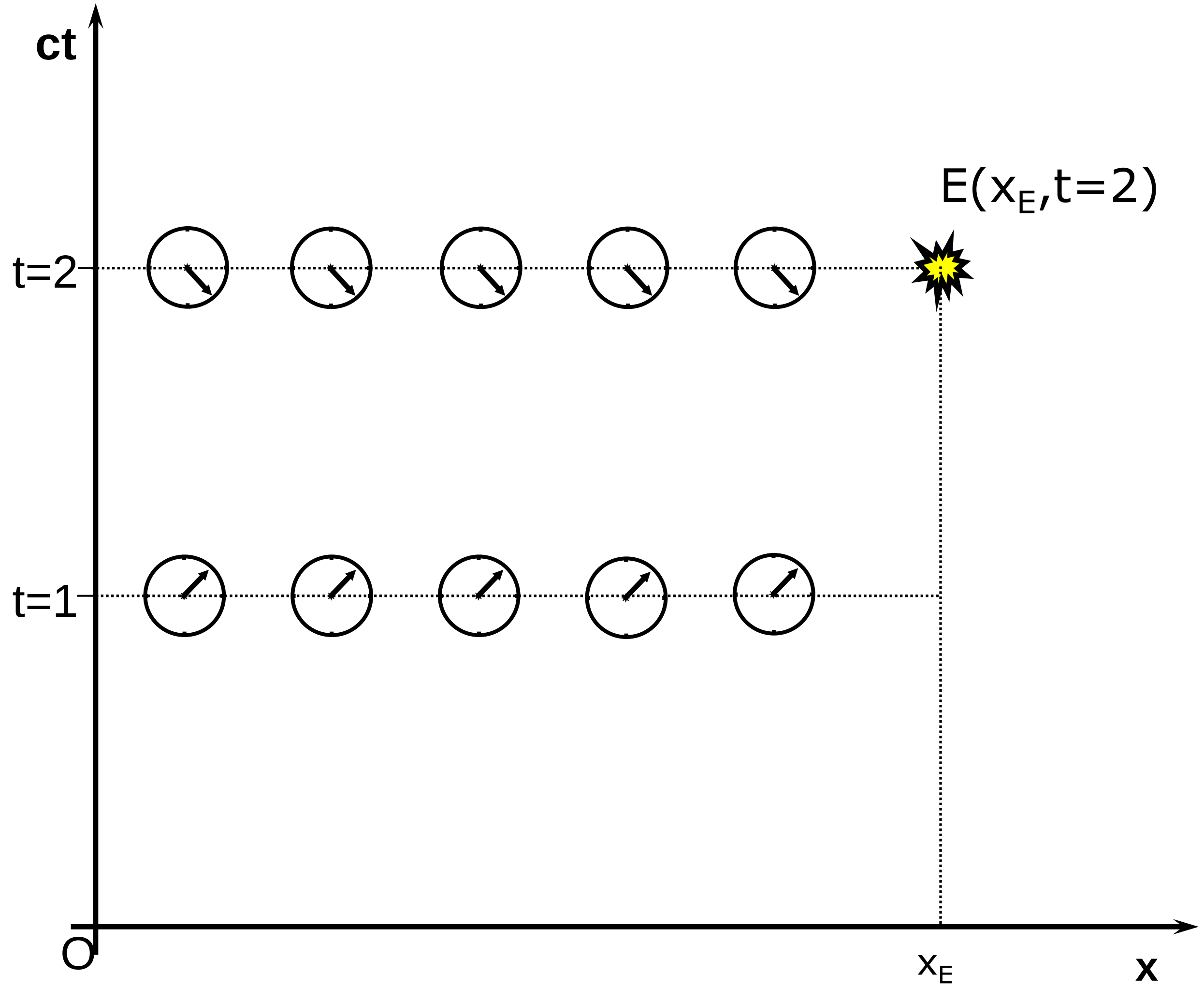
- Die „Beobachtung“, die ein inertialer Beobachter macht, ist die Tatsache, daß er einem Ereignis *E* die Koordinaten (x , y, z) des Ortes und die Zeit *t*, abgelesen an dem Ort (x, y, z), zuweist.

- Es ist nicht die Zeit *t*, die ein menschlicher Bobachter in dem Raumpunkt (0, 0, 0) registriert, sobald er von dem Ereignis *E* erfährt.

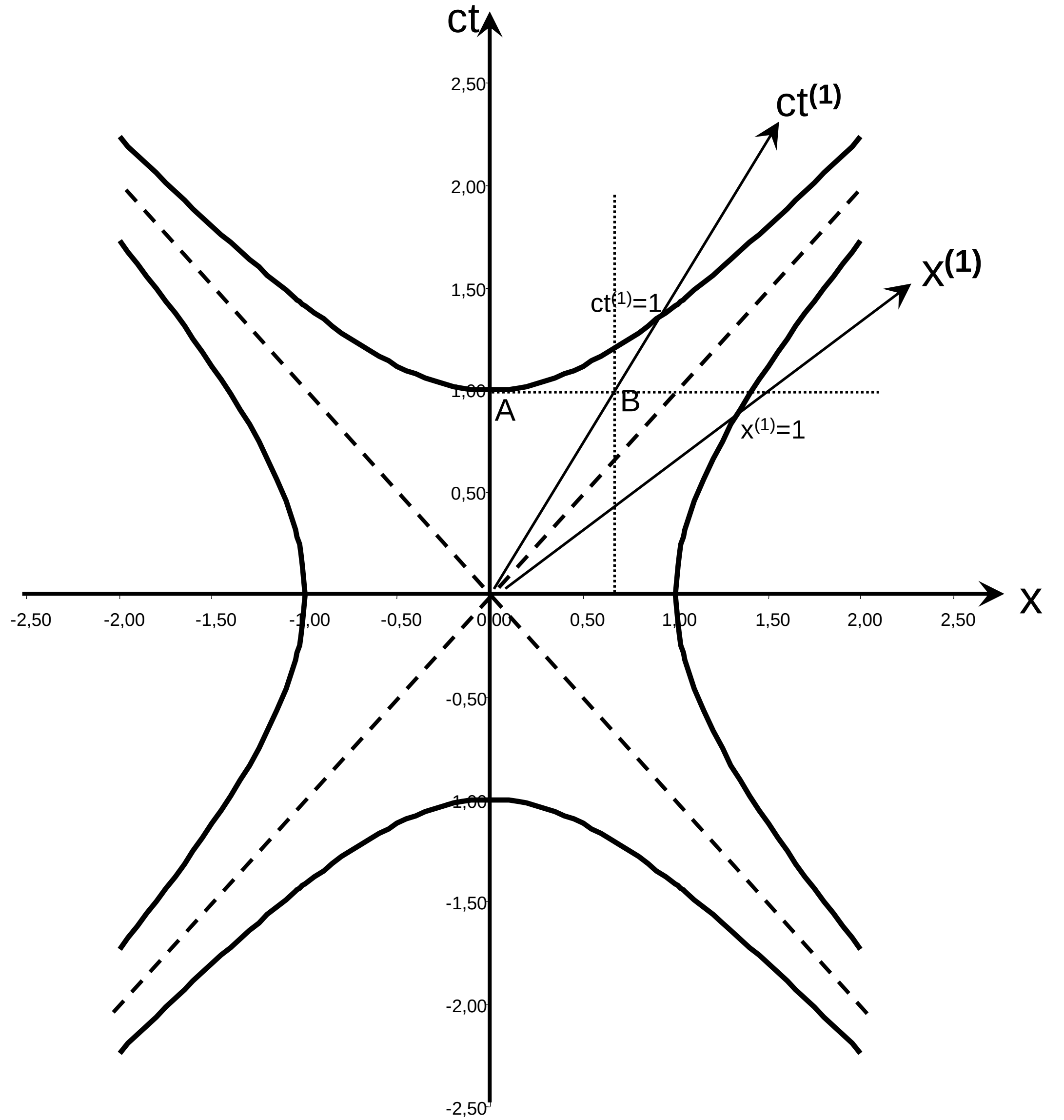
- Wenn oft gesagt wird, „ein bewegter Stab erscheint verkürzt …“, so ist immer ein Meßvorgang und keine visuelle Bobachtung gemeint.

- Die *visuelle Beobachtung* (Photo, Film …) ist von grundsätzlich anderer Art!

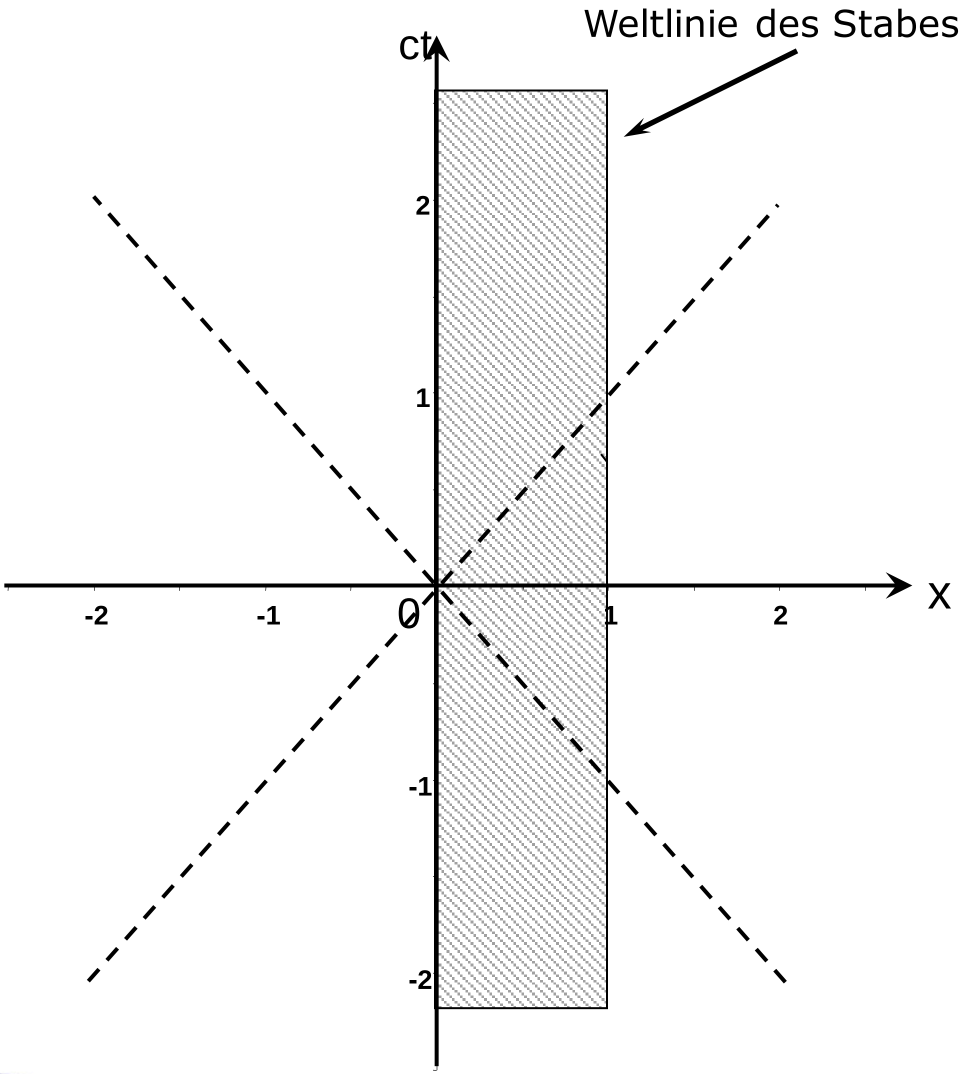
Synchrone Uhren



Konstruktion für v=2/3c



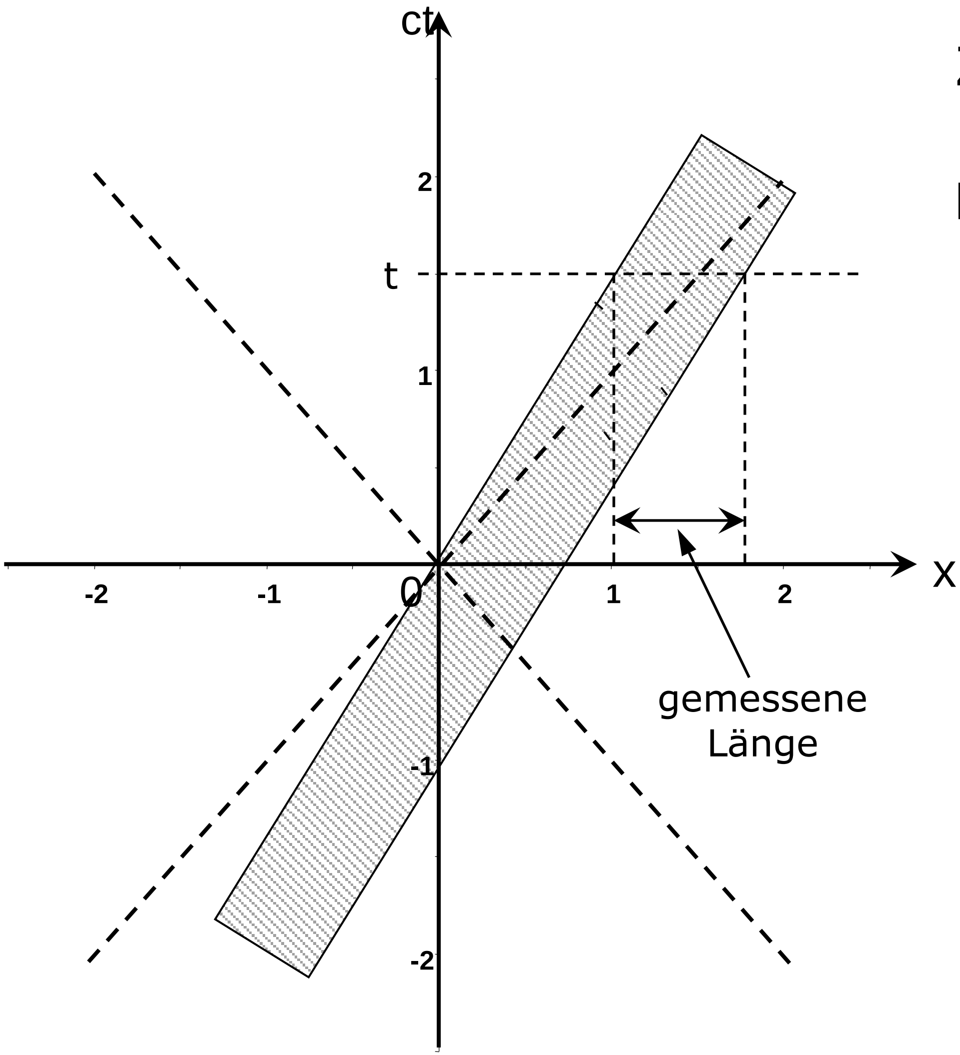
Längenmessung im Ruhesystem



Zitat Einstein:

a. Der Beobachter bewegt sich samt einem Maßstab mit dem auszumessenden Stab und mißt direkt durch Anlegen des Maßstabes die Länge des Stabes, ebenso, wie wenn sich auszumessender Stab, Beobachter und Maßstab in Ruhe befänden.

Längenmessung eines bewegten Stabes

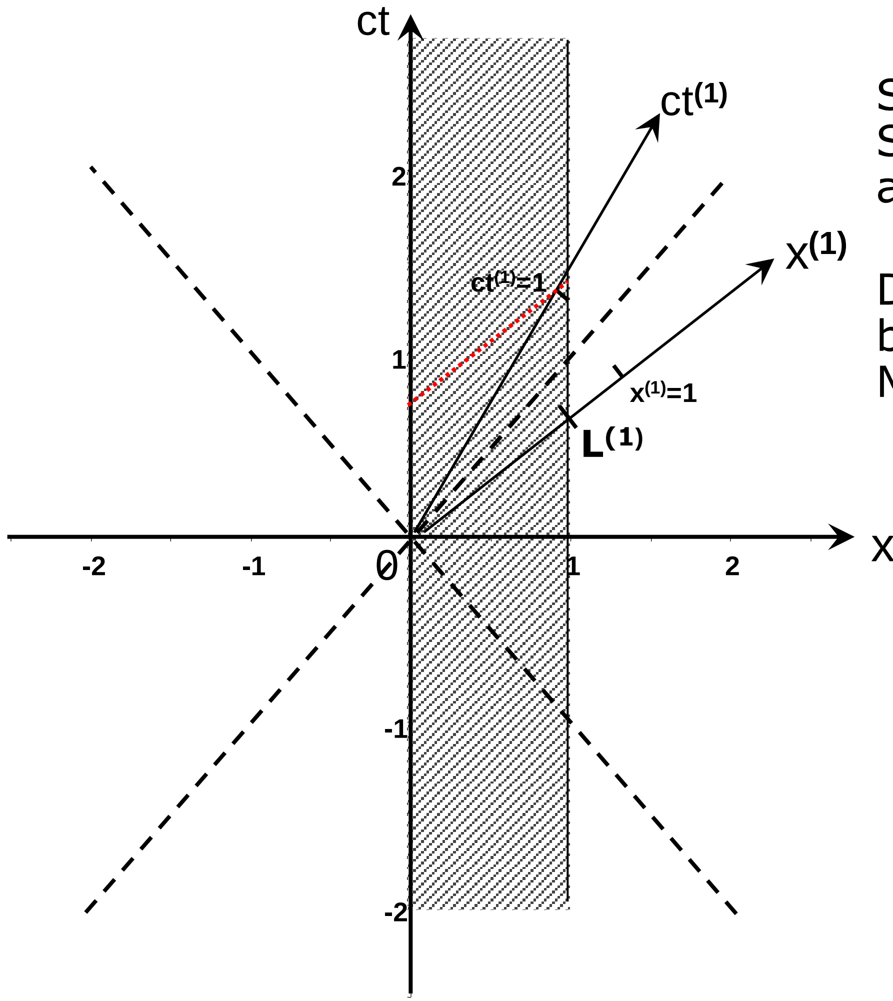


Zitat Einstein:

b. Der Beobachter ermittelt mittels im ruhenden System aufgestellter synchroner, ruhender Uhren, in welchen Punkten des ruhenden Systems sich Anfang und Ende des auszumessenden Stabes zu einer bestimmten Zeit t befinden.

Die Entfernung dieser beiden Punkte, gemessen mit dem schon benutzten, in diesem Falle ruhenden Maßstabe ist ebenfalls eine Länge, welche man als die Länge des Stabes bezeichnen kann.

Längenkontraktion: Stab ruht in S



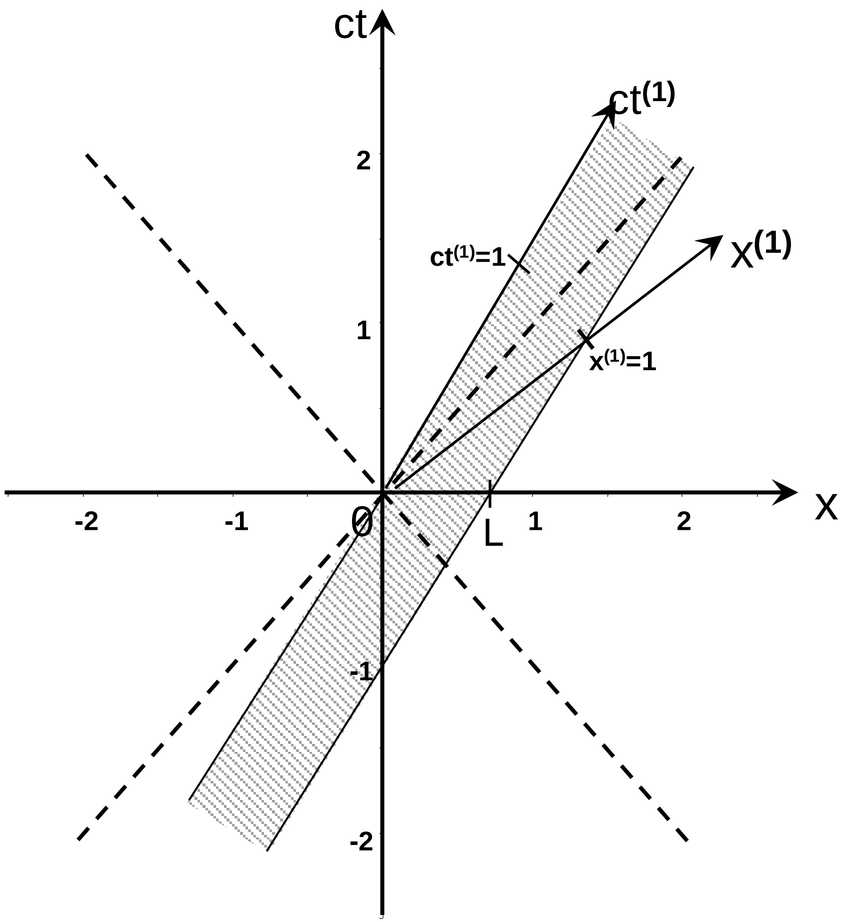
Stab ruht im unbewegten System S, die Länge wir gem. Methode a) ausgemessen: z.B. 1 Einheit

Die Längenmessung des Stabes im bewegten System muß gem. Methode b) erfolgen:

- Die Entfernung der Punkte, in denen sich Anfang und Endes des Stabes zu einem bestimmten Zeitpunkt – z.B. $t^{(1)}=0$ – gleichzeitig befinden, ergibt die gemessene Länge des Stabes
- In dem Beispiel $L^{(1)}$ und

$$\mathbf{L^{(1)} < 1}$$

Längenkontraktion: Stab ruht in $S^{(1)}$



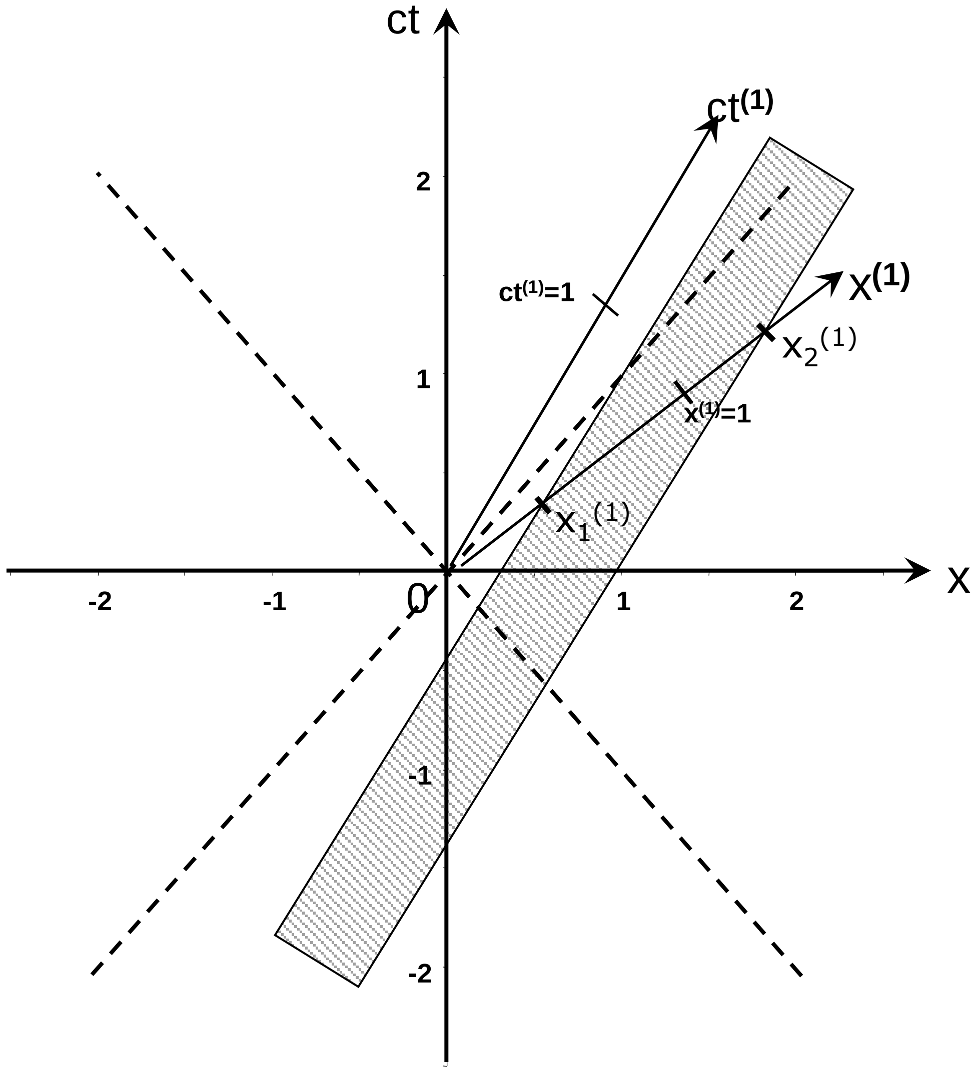
Stab ruht im bewegten System $S^{(1)}$, die Länge wir gem. Methode a) ausgemessen: z.B. 1 Einheit

Die Längenmessung des Stabes im ruhenden System muß gem. Methode b) erfolgen:

- Die Entfernung der Punkte, in denen sich Anfang und Endes des Stabes zu einem bestimmten Zeitpunkt – z.B. t=0 – gleichzeitig befinden, ergibt die gemessene Länge des Stabes im Ruhesystem
- In dem Beispiel L und

L < 1

Lorentz-Kontraktion - Herleitung



Die Ruhelänge L_R des Stabes im bewegten System $S^{(1)}$ ist:

$$L_R = x_2^{(1)} - x_1^{(1)}$$

Die Lorentz-Transformation angewandt, bestimmt die Länge L_R aus Sicht des Systems S:

$$L_R = x_2^{(1)} - x_1^{(1)} = \frac{x_2 - v\,t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - v\,t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Zur Messung der Länge L_B in S muß nach Methode b) $t_1 = t_2$ sein:

$$L_R = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L_B}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$L_B = L_R\sqrt{1-\beta^2}$$

Lorentz-Kontraktion

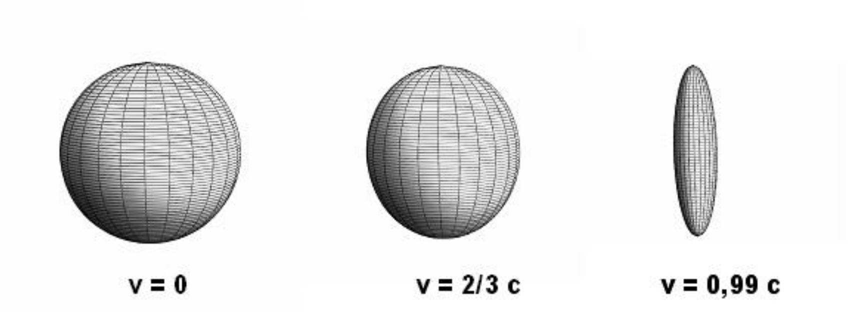
Die im Ruhesystem S gemessene Länge L_B eines bewegten Stabes mit der Länge L_R erscheint um den Betrag $(1-\beta^2)^{½}$ verkürzt:

$$L_B = L_R \sqrt{1-\beta^2} = L_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

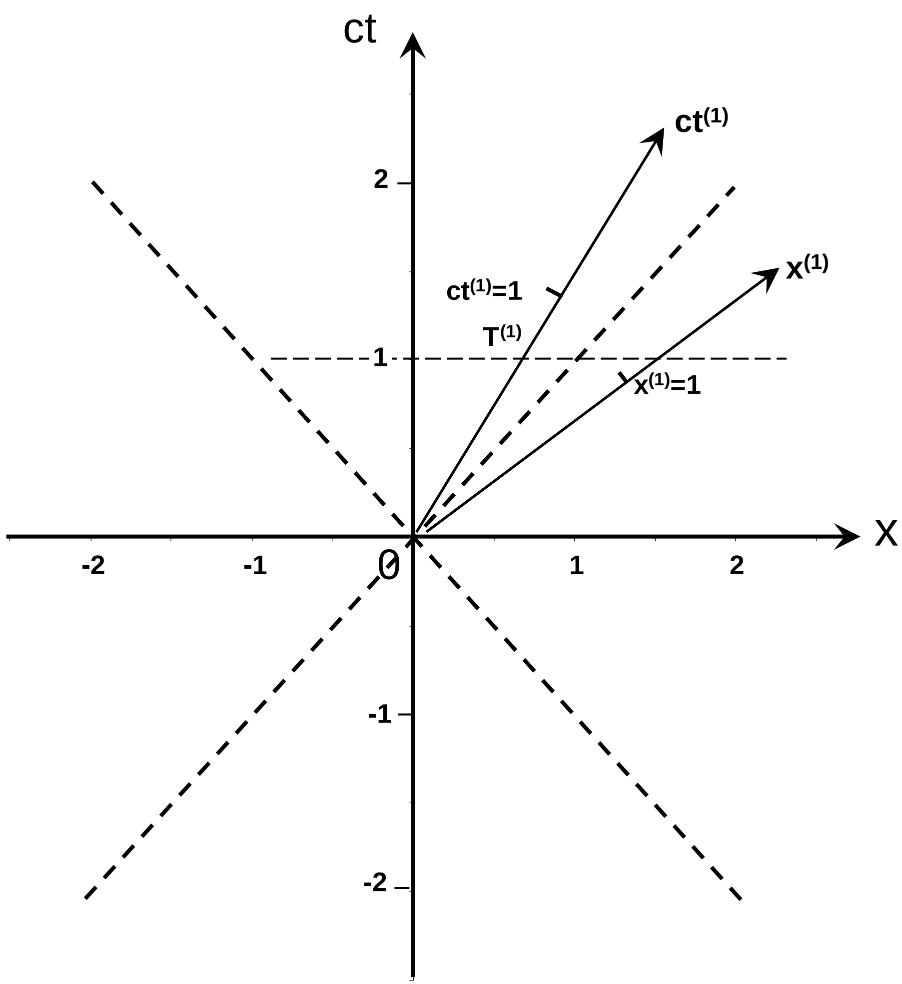
Der Stab wird nicht physisch verkürzt !!!!!

Nur die Längenmessung in S des bewegten Stabes ergibt einen kleineren Wert als seine Ruhelänge.

Einstein:
Scheinbare Kontraktion einer bewegten Kugel



Zeitdilatation: Uhr ruht in S

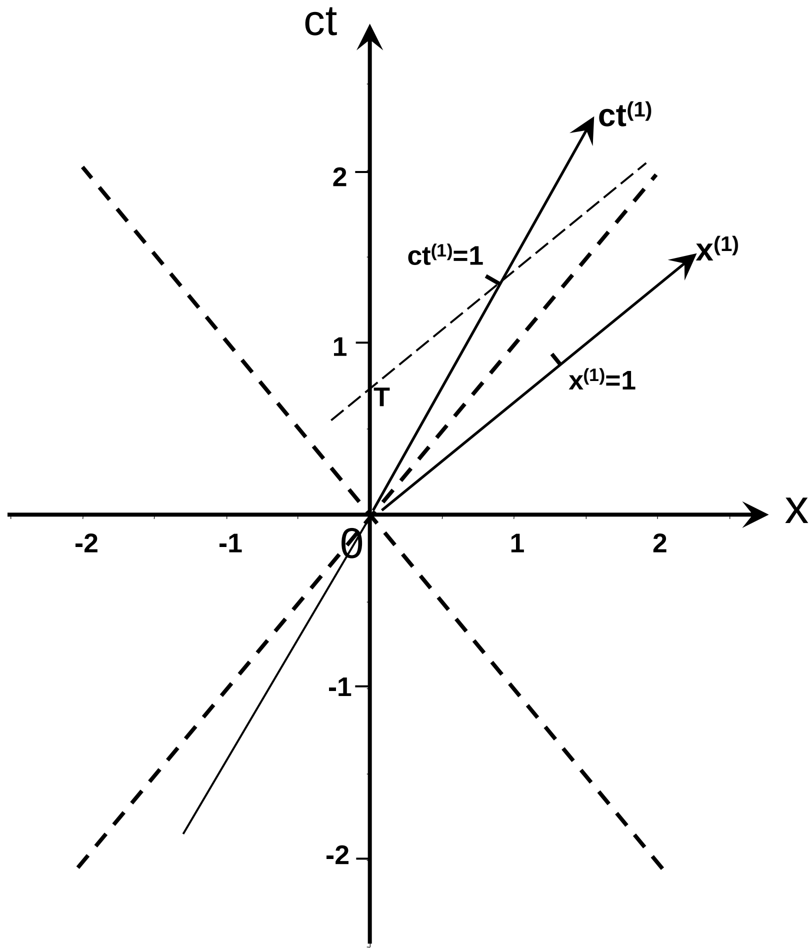


- In S seien alle Raumpunkte mit synchronisierten idealen Uhren besetzt.
- Alle Punkte auf der x-Achse zeigen ct=0.
- Analog zeigen alle Uhren auf der durch ct=1 gehenden Parallele zur x-Achse ct=1.
- Diese Parallele schneidet die $ct^{(1)}$–Achse in $T^{(1)}$.

$$ct^{(1)}(T^{(1)}) < ct^{(1)}(1)$$

- Im dazu bewegten System gehen die Uhren langsamer!

Zeitdilatation Uhr ruht in S $^{(1)}$

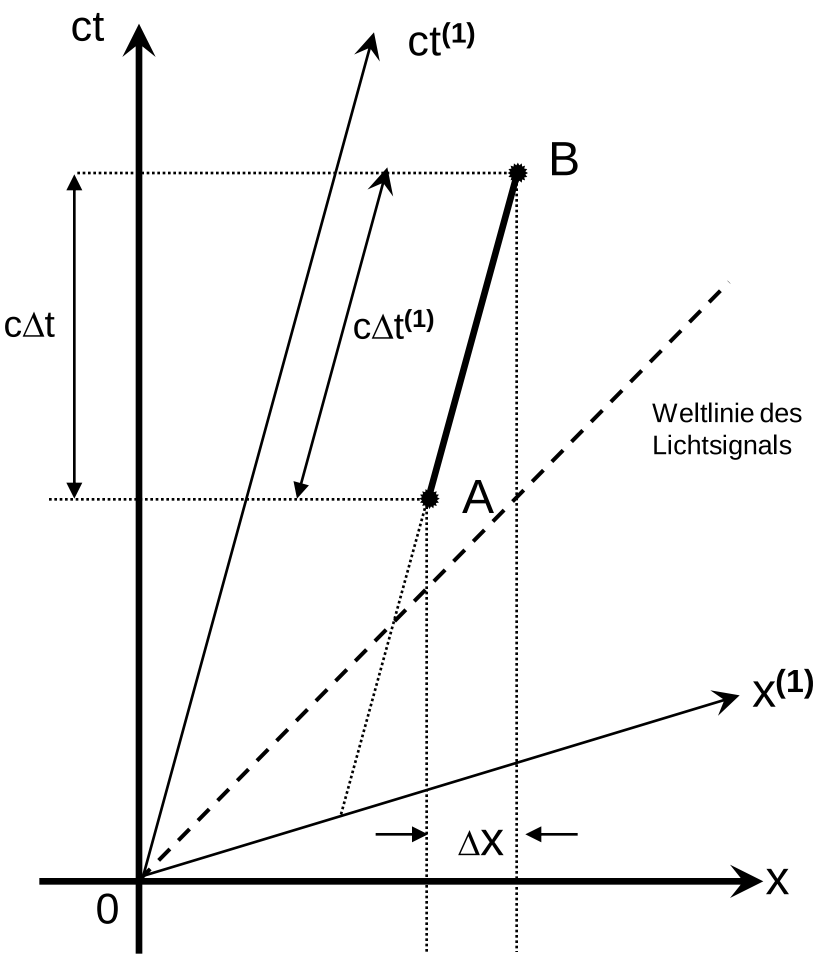


- In $S^{(1)}$ seien alle Raumpunkte mit synchronisierten idealen Uhren besetzt.
- Alle Punkte auf der $x^{(1)}$-Achse zeigen $ct^{(1)}=0$.
- Analog zeigen alle Uhren auf der durch $ct^{(1)}=1$ gehenden Parallele zur $x^{(1)}$-Achse $ct^{(1)}=1$.
- Diese Parallele schneidet die ct–Achse in T.

$$ct(T) < ct(1)$$

- Im dazu bewegten System gehen die Uhren langsamer!

Herleitung der Zeitdilatation aus der Eigenzeit



$(\Delta s)^2$ ist invariant, daher:

$$(c\Delta t^{(1)})^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

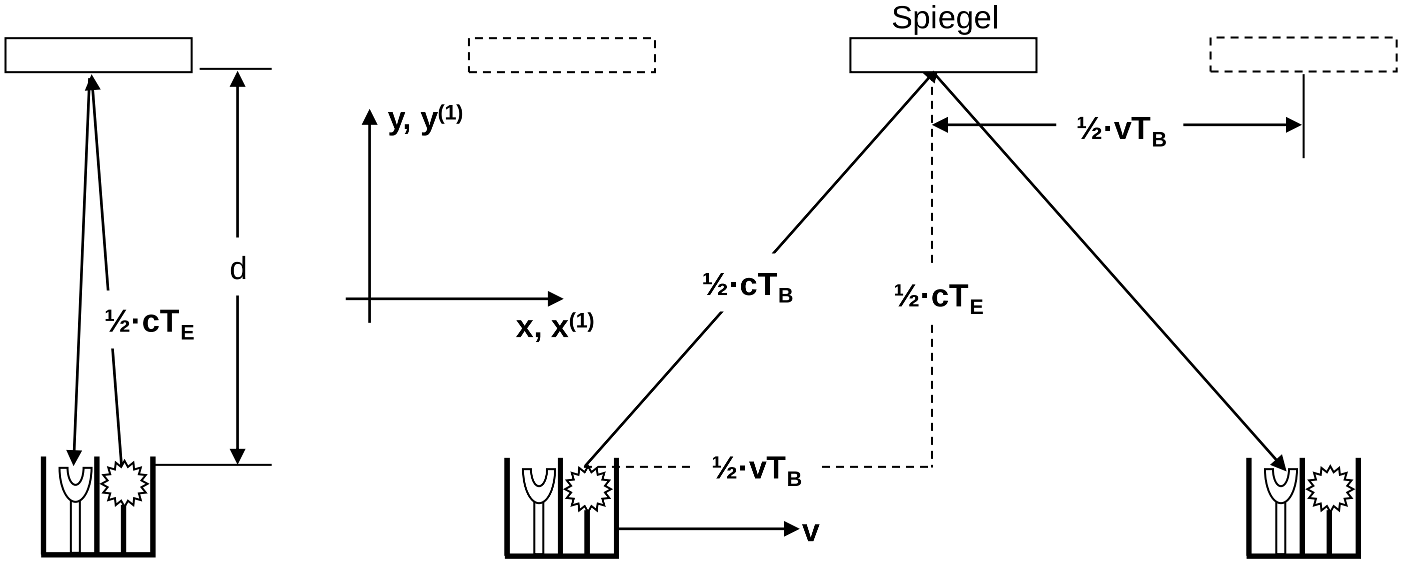
$\Delta t^{(1)}$ ist die Eigenzeit Δt_E im System $S^{(1)}$:

$$\Delta t_E = \frac{1}{c}\sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Bezeichnen wir Δt_E mit T_E, die Zeit, die in $S^{(1)}$ vergeht, und mit T_B, die Zeit, die dabei in S vergeht:

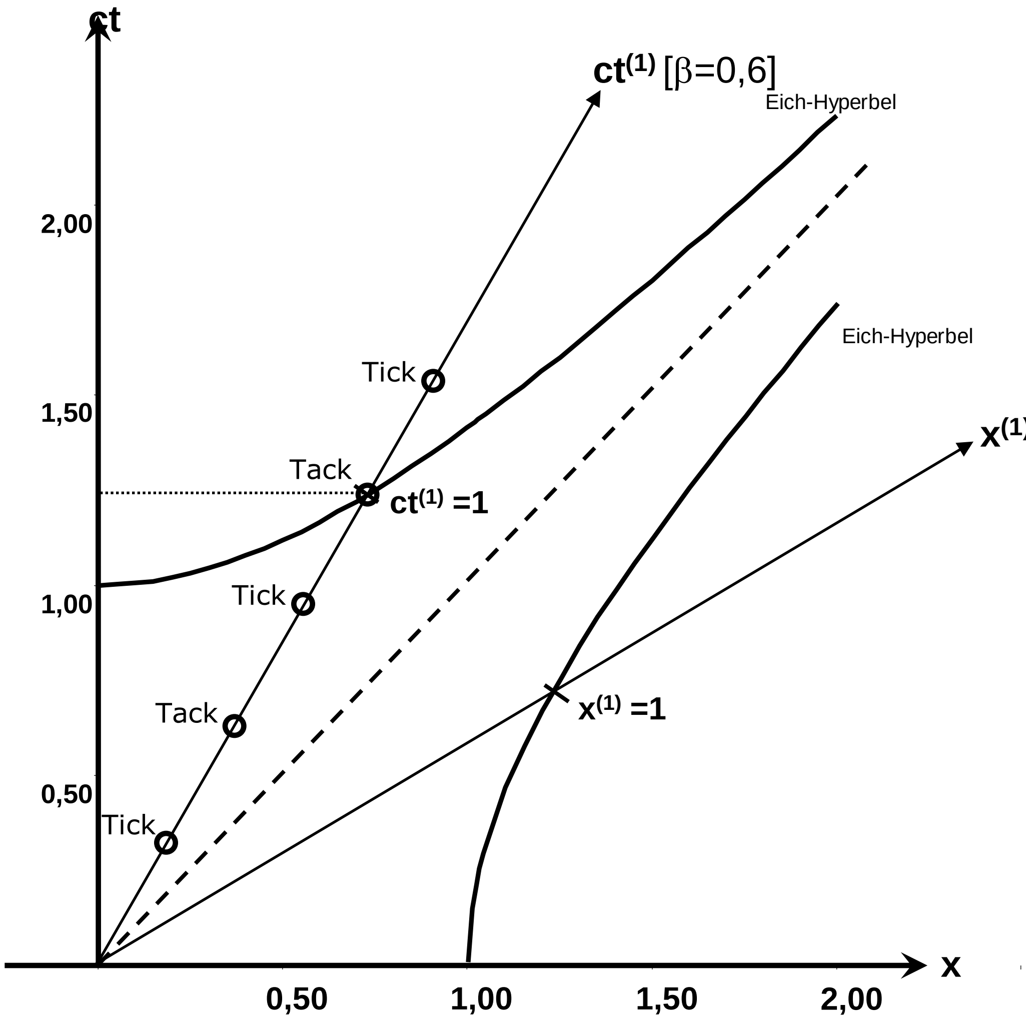
$$T_B = \frac{T_E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zeitdilatation: Methode Feynman

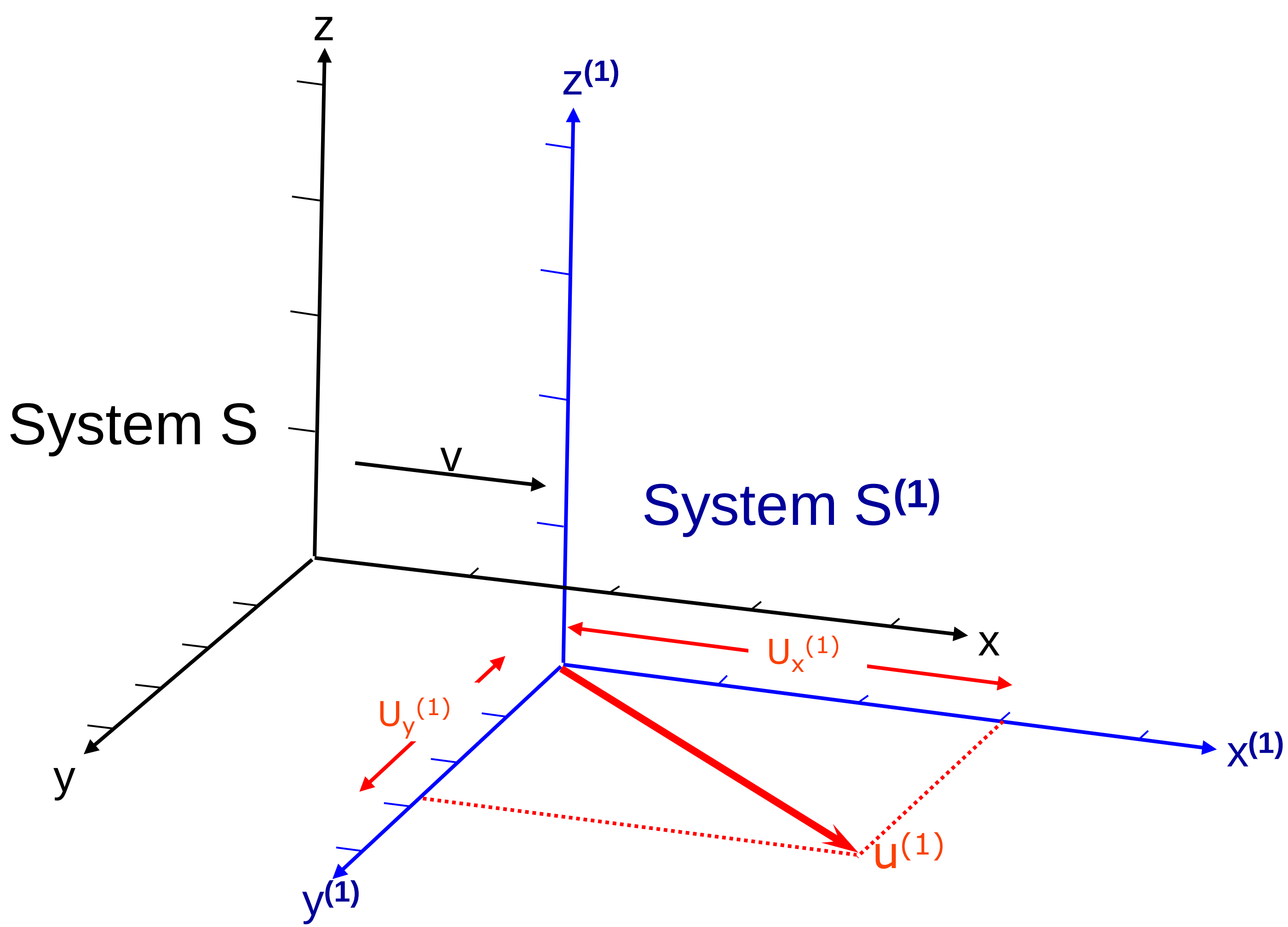


$$\frac{1}{4}c^2T_B^2 = \frac{1}{4}v^2T_B^2 + \frac{1}{4}c^2T_E^2 \Rightarrow T_B = \frac{T_E}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Zeitdilatation



Additionstheorem der Geschwindigkeiten



Formeln des Additionstheorems

$$x^{(1)} = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$y^{(1)} = y$$
$$z^{(1)} = z$$
$$t^{(1)} = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x^{(1)} = u_x^{(1)} \cdot t^{(1)}$$
und
$$x = u_x \cdot t$$

$$y^{(1)} = u_y^{(1)} \cdot t^{(1)}$$
und
$$y = u_y \cdot t$$

Einsetzen der Lorentz-Transformation

$$(x - v\,t) = u_x^{(1)}(t - \frac{v}{c^2}x)$$
oder
$$x = \frac{(u_x^{(1)} + v)}{1 + \frac{u_x^{(1)} v}{c^2}} \cdot t$$

$$u_y = \frac{u_y^{(1)}\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{u_x = \frac{u_x^{(1)} + v}{1 + \frac{u_x^{(1)} v}{c^2}}}$$

$$\boxed{u_y = u_y^{(1)} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x^{(1)} v}{c^2}}}$$

Grenzgeschwindigkeit c

$$\boxed{u_x = \frac{u_x^{(1)} + v}{1 + \frac{u_x^{(1)} v}{c^2}}} \qquad \boxed{u_y = u_y^{(1)} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x^{(1)} v}{c^2}}}$$

Für kleine Geschwindigkeiten v«c erhalten wir:

$$u_x = u_x^{(1)} + v \quad \text{und} \quad u_y = u_y^{(1)}$$

Ein Photon fliege in $S^{(1)}$ in Richtung der $x^{(1)}$-Achse; in S sind seine Geschwindigkeits-komponenten:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{c\,v}{c^2}} = c \quad \text{und} \quad u_y = 0$$

Fliegt das Photon in $S^{(1)}$ in Richtung der $y^{(1)}$-Achse, gilt:

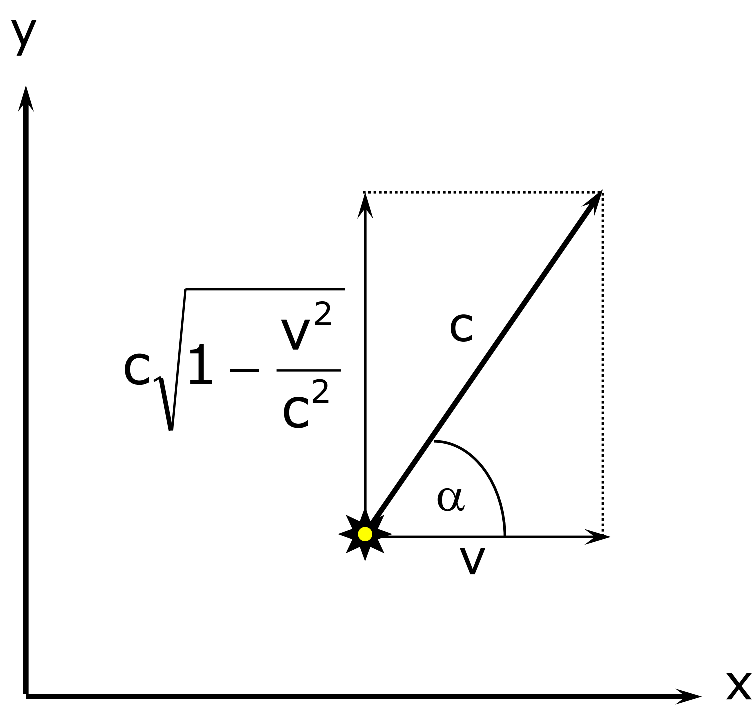
$$u_x = v \quad \text{und} \quad u_y = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist aber trotzdem C:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + c^2\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)} = c$$

Vorwärtsstrahlung

Fliegt das Photon in $S^{(1)}$ in Richtung der $y^{(1)}$-Achse, gilt:



$$u_x = v \quad \text{und} \quad u_y = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

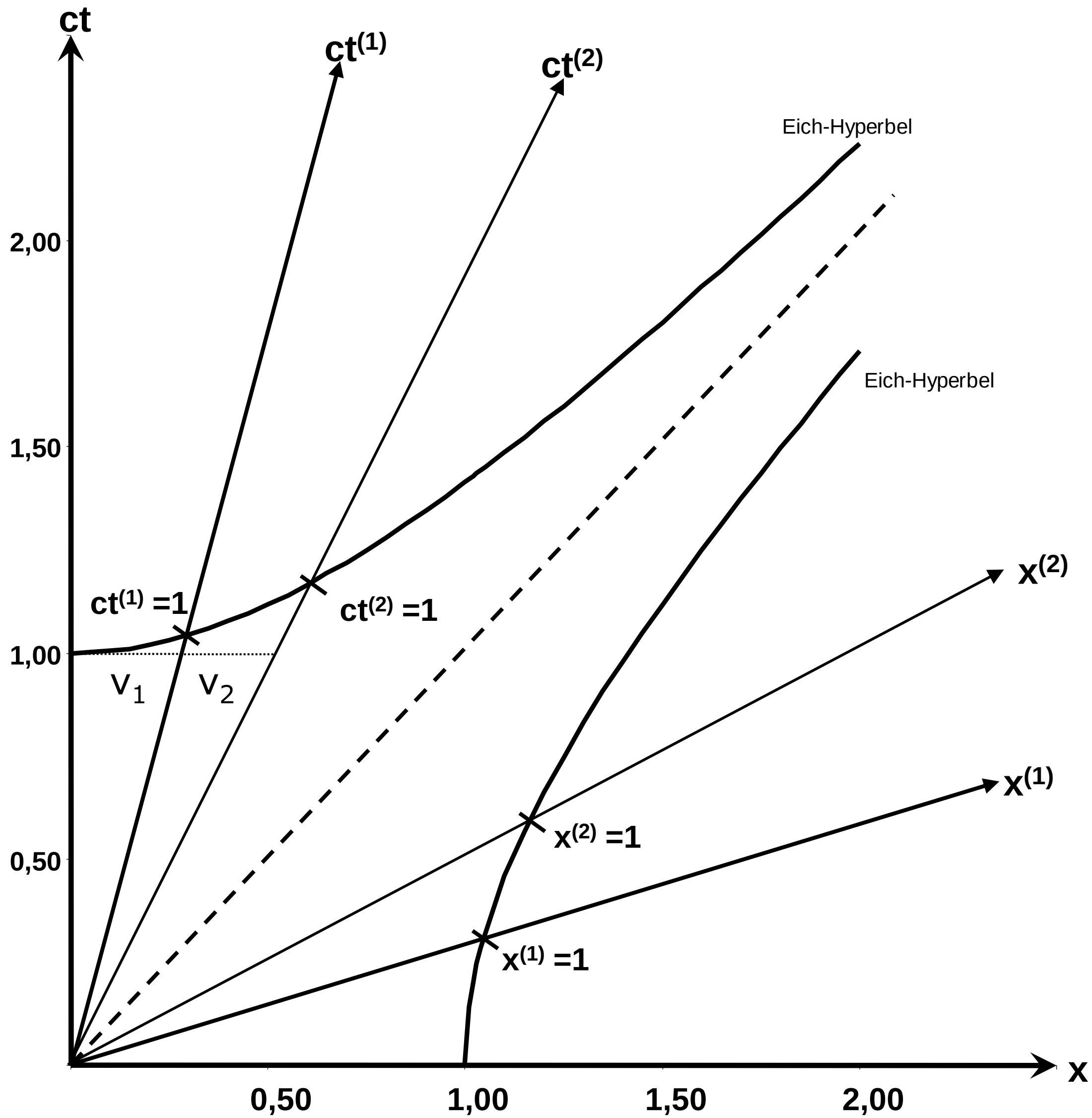
Beispiel: $v=2/3\cdot c \;\Rightarrow\; \alpha \approx 48^o$

Erfolgt die Abstrahlung in einem Winkel ϑ zur x-Achse, dann gilt die allgemeine Formel:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\vartheta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\cos\vartheta + \frac{v}{c}}$$

(Herleitung: siehe Skriptum Kap. B.2, Aberrationsgleichung)

Grenzgeschwindigkeit



Additionstheorem - Kausalität