Spezielle Relativitätstheorie

Einsteins
Raum- und Zeitbegriff

Ausgangssituation

- Einstein war von der universellen Gültigkeit des Relativitätsprinzips überzeugt: in allen Inertialsystemen gelten die gleichen physikalischen Gesetze!

- Dagegen galten nach Lorentz im (ruhenden) Äther für elektro-magnetischen Effekte die Maxwellschen Gleichungen und für Inertialsysteme dabei die Lorentz-Transformation.
  Für Effekte der klassischen Mechanik galt dagegen bei den Inertialsystemen die Galilei-Transformation.

- Das Michelson-Morley-Experiment erbrachte aber keinerlei Hinweis auf eine Bewegung der Erde relativ zum Äther.

- Lorentz postulierte (mit Hilfe eines mathematische Tricks) die physische Kontraktion des Interferometerarmes, um das Experiment zu erklären.

- Für Einstein dagegen war das Ergebnis des Versuchs ein empirischer Hinweis für die Gültigkeit des Relativitätsprinzips <u>auch</u> für die Elektrodynamik und Optik!

Prämissen der Speziellen Relativitätstheorie

1. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist für alle gleichförmig gegeneinander bewegten Systeme gleich groß.

2. In allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen gelten durchweg die gleichen Naturgesetze (Relativitätsprinzip).

- Zitat [Born]

  „Dazu gehört eine erhabene Freiheit von Konventionen der überkommenen Theorie, die erst dann möglich ist, wenn der gordische Knoten von Konstruktionen und Hypothesen so verwickelt geworden ist, daß das Durchhauen die einzige Lösung bleibt. . . .

  Er fand in den üblichen Vorstellungen von Raum und Zeit eine Annahme, die nicht auf Tatsachen beruhte. Er hatte Erfolg, indem er diese vorgefaßte Meinung aus der Theorie entfernte."

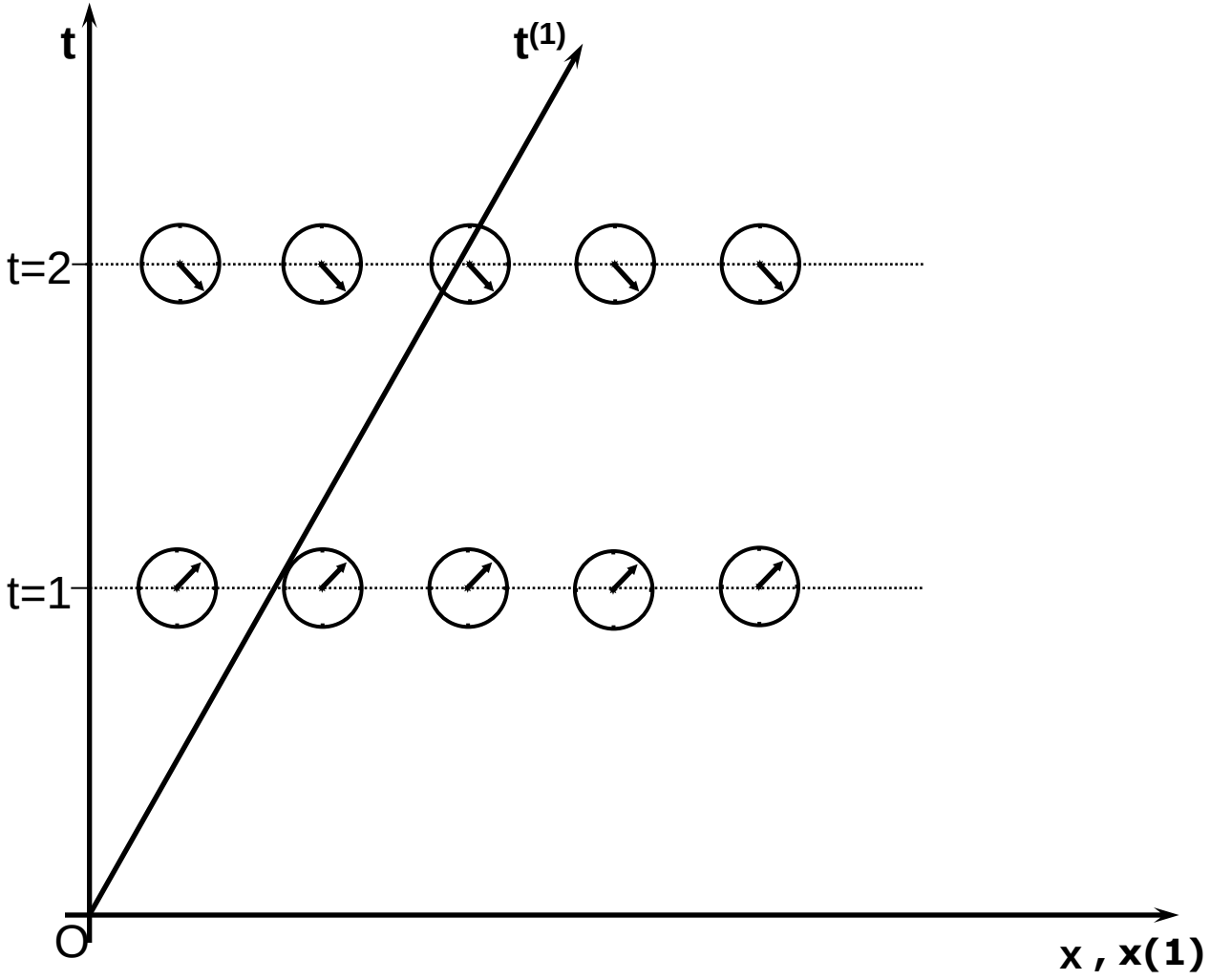
- Nicht umsonst benannte Einstein seine Arbeit 1905:

  „Zur Elektrodynamik bewegter Körper"

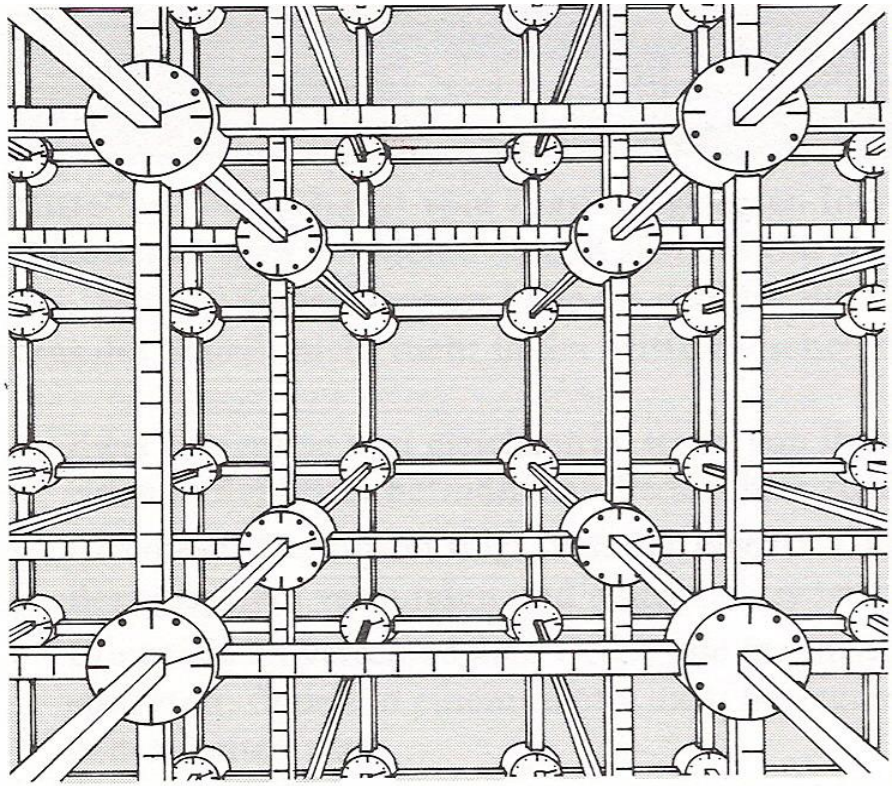
Einsteins Raum und Zeit

- Zitat [Einstein]:
  „Wollen wir die Bewegung eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter ”Zeit“ verstanden wird. Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welcher die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über gleichzeitige Ereignisse sind.“
- *„Zeit ist, was die Uhr zeigt“*
- Eine Aussage über Zeit oder Gleichzeitigkeit ist nur mit Hilfe von Uhren möglich.

Gleichzeitigkeit in der Newtonschen Raum-Zeit



Synchronisation von Uhren

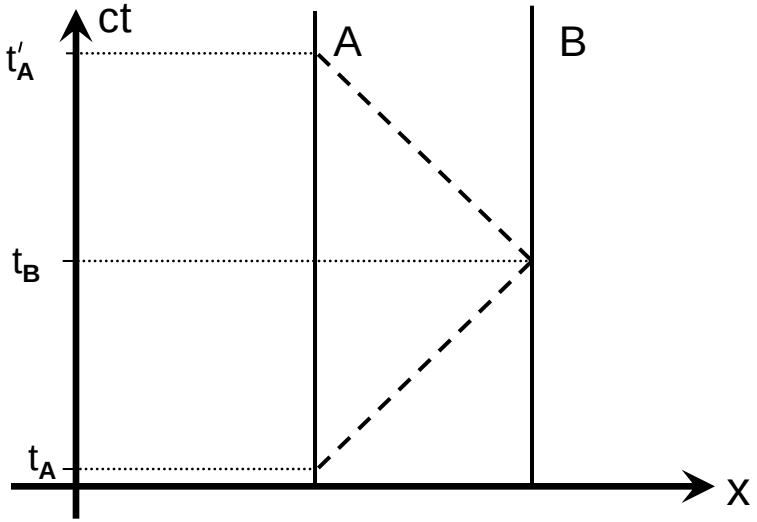


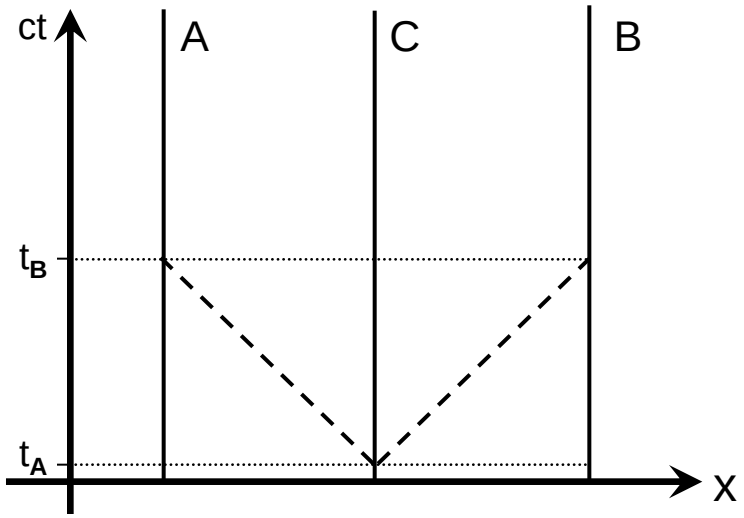
Quelle: Sexl/Schmidt; Raum-Zeit-Relativität

1. Man trägt sie an die selbe Stelle, z.B. in die Mitte von A und B, reguliert sie ein und bringt sie dann zu ihren Ausgangspunkten zurück.

2. Man benutzt Signale zur Synchronisation.

Verfahren zur Synchronisation

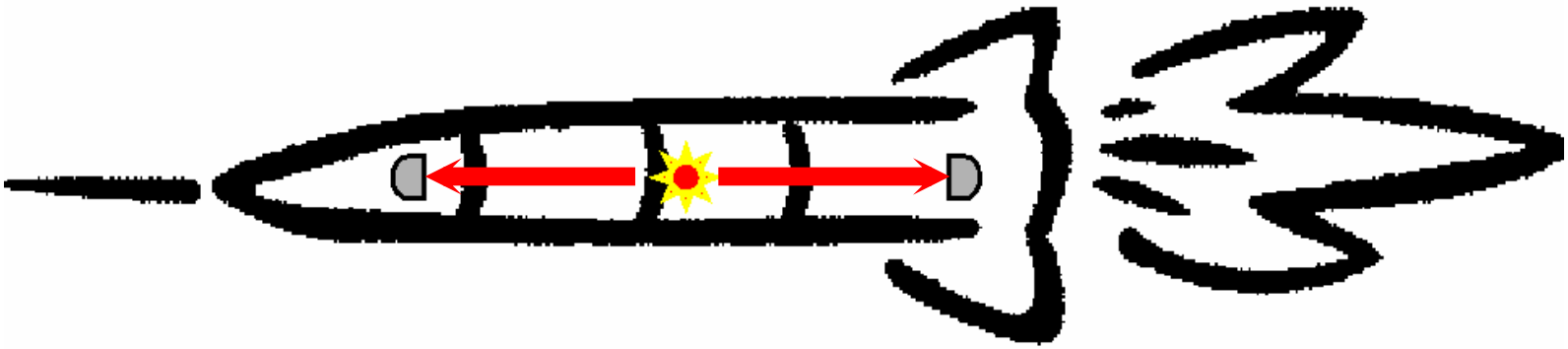




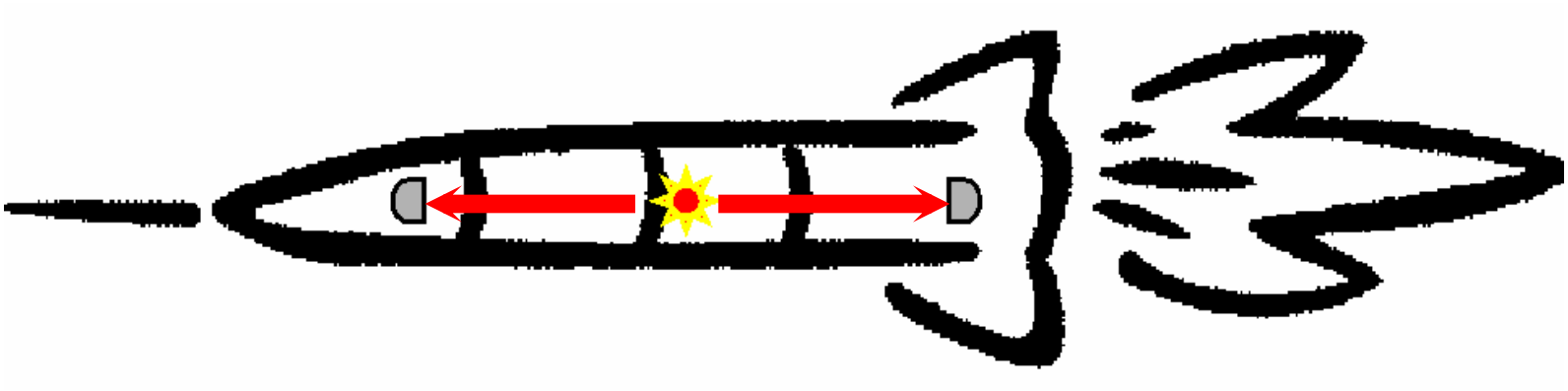
Uhren sind synchron, wenn

$t_B - t_A = t'_A - t_B$

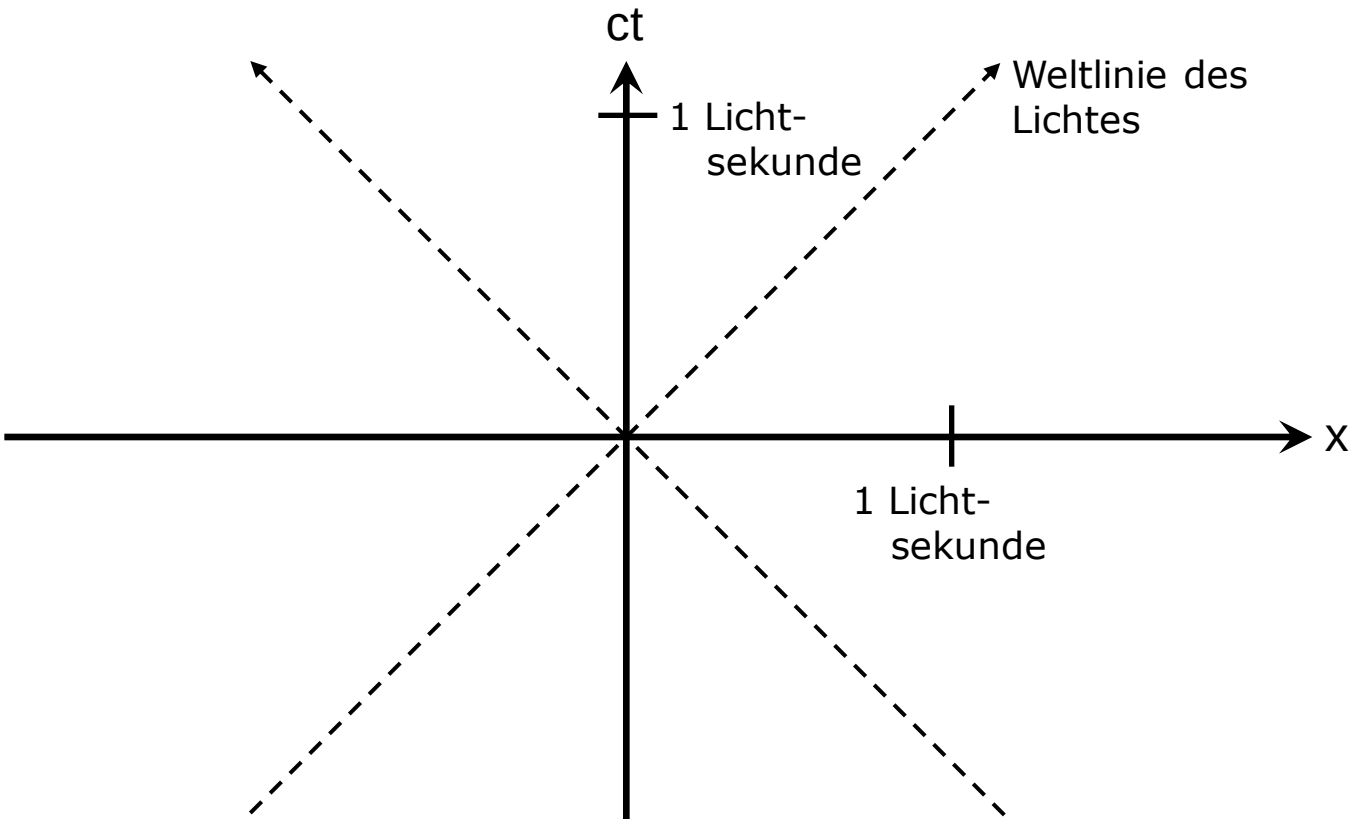
Gleichzeitigkeit im bewegten System



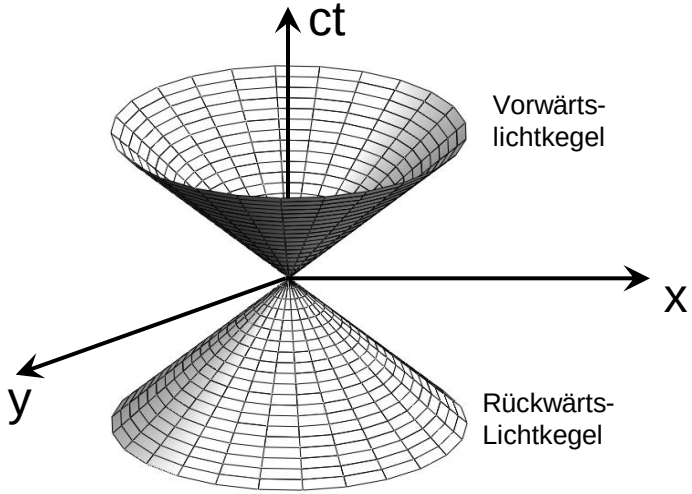
Gleichzeitigkeit vom ruhenden System aus

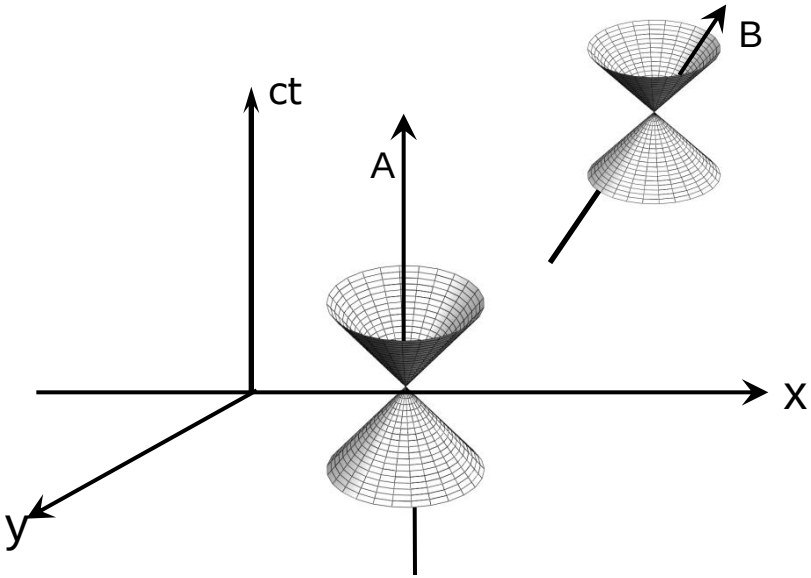


Raum-Zeit-Diagramm oder Minkowski-Welt

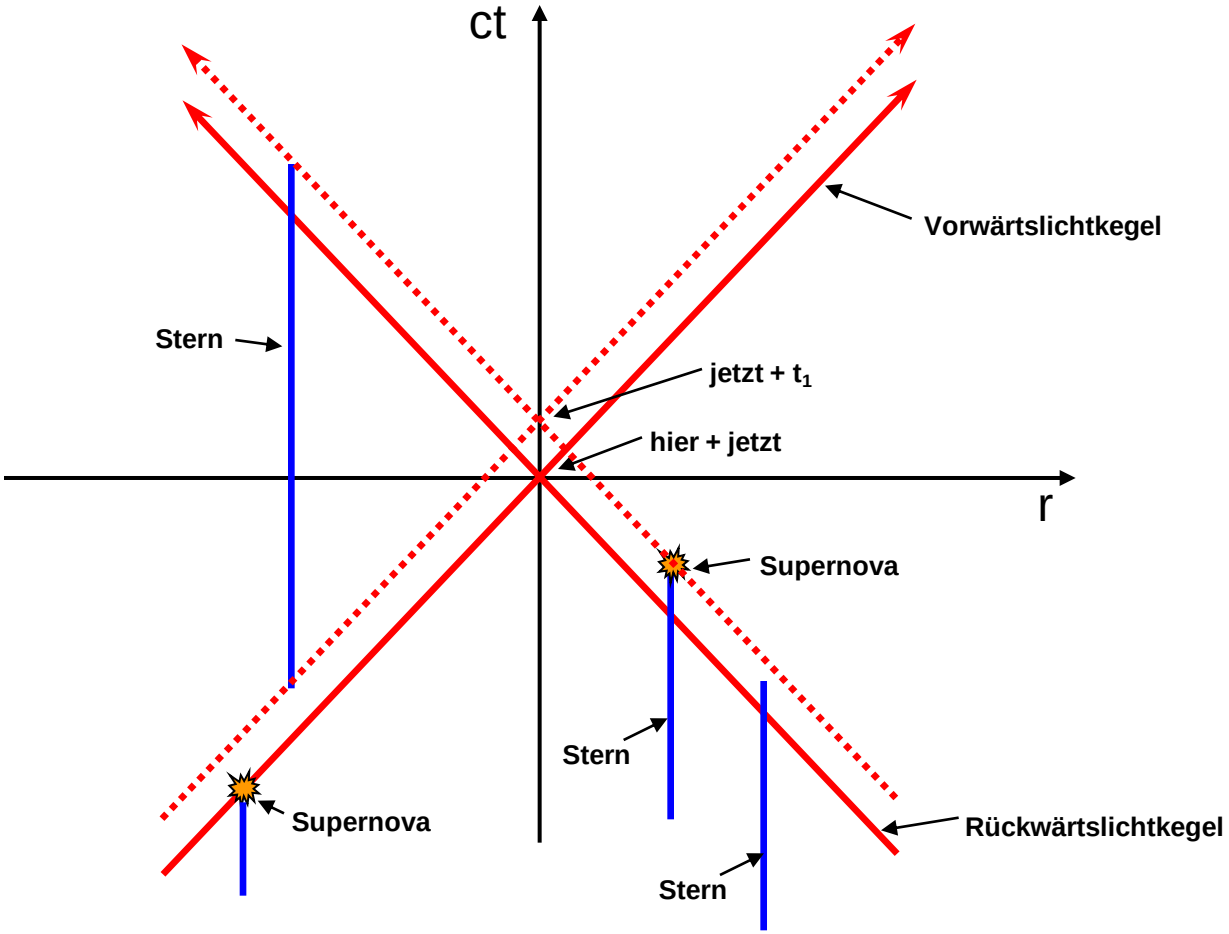


Lichtkegel

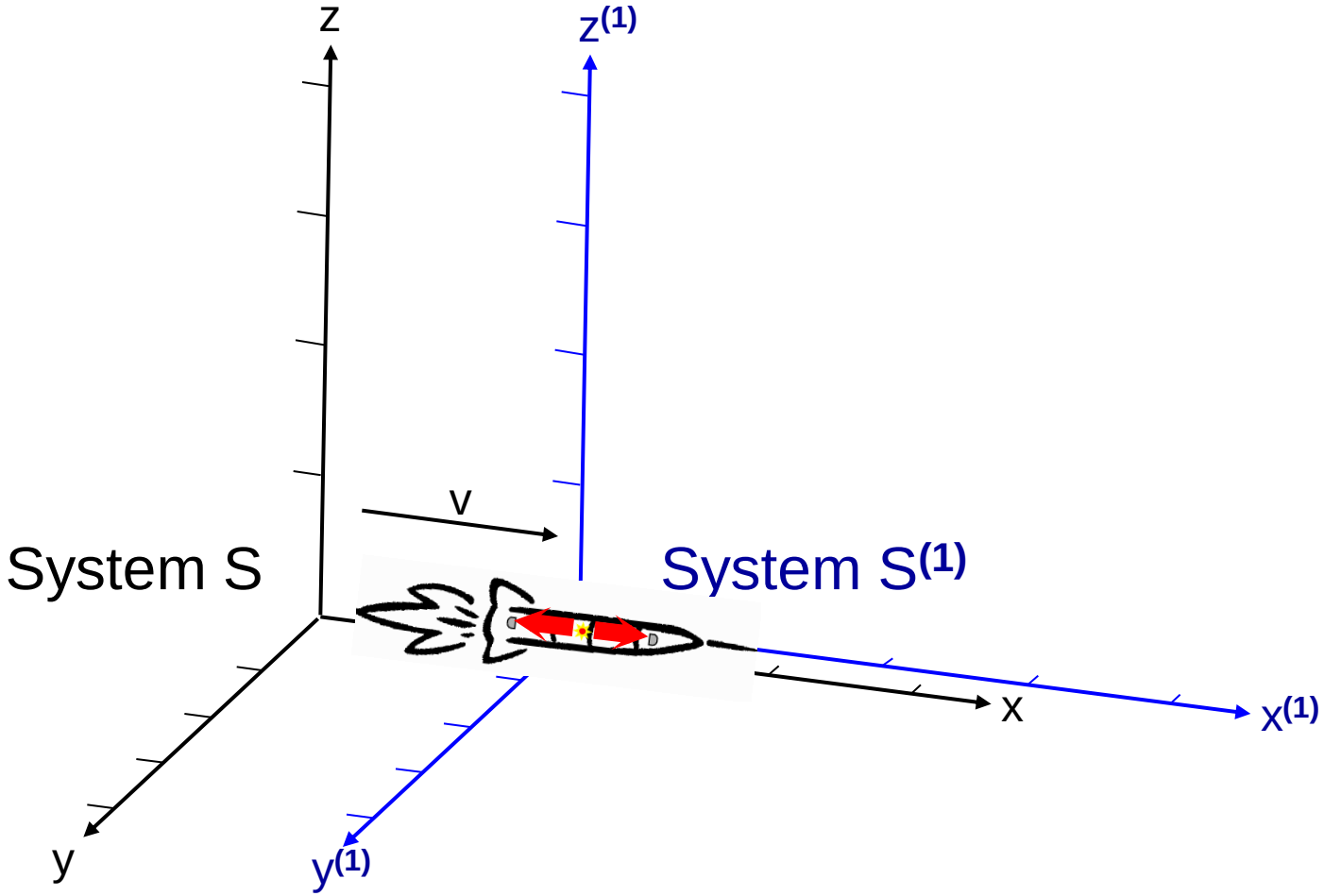




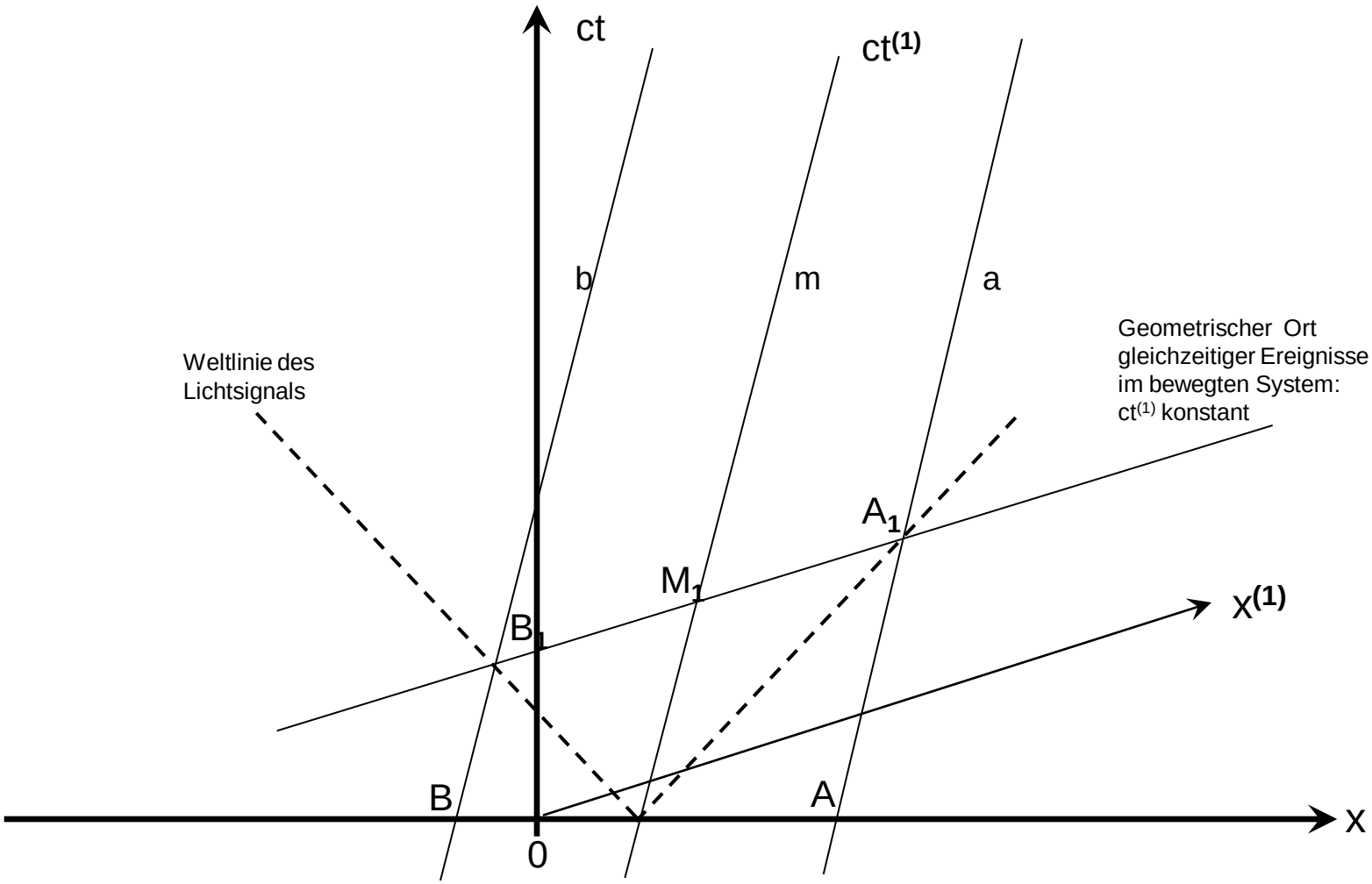
Sichtbarkeit



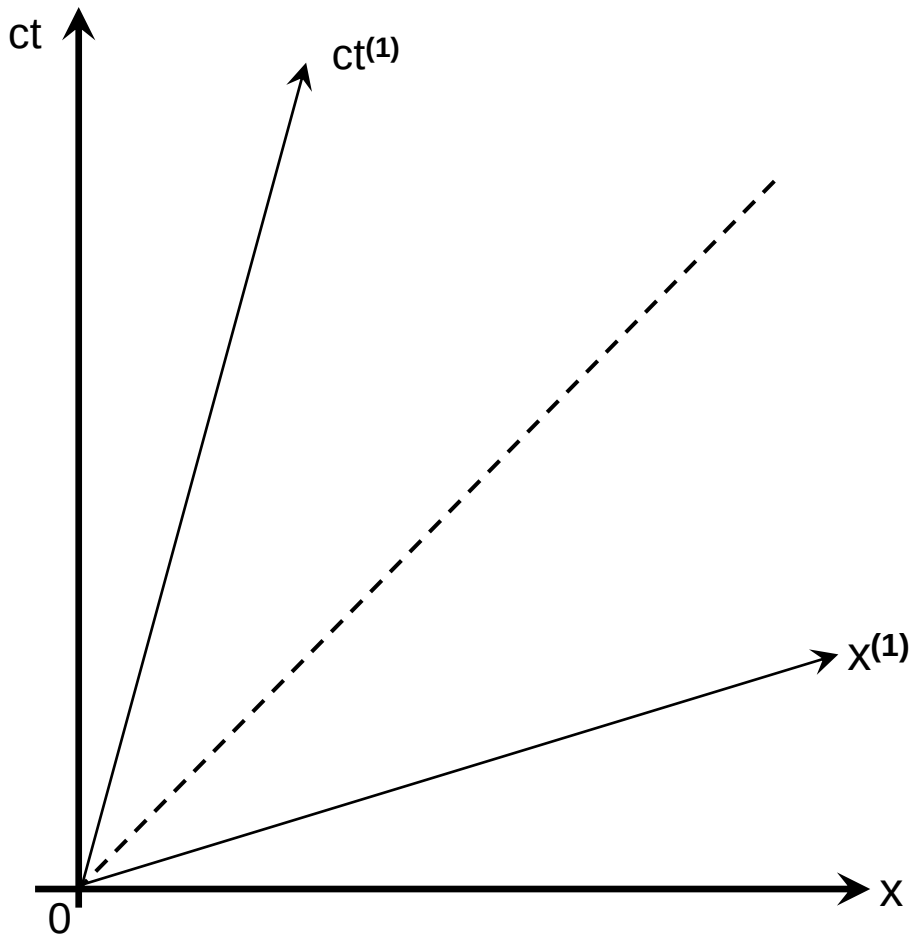
Relativ zueinander bewegte Inertialsysteme



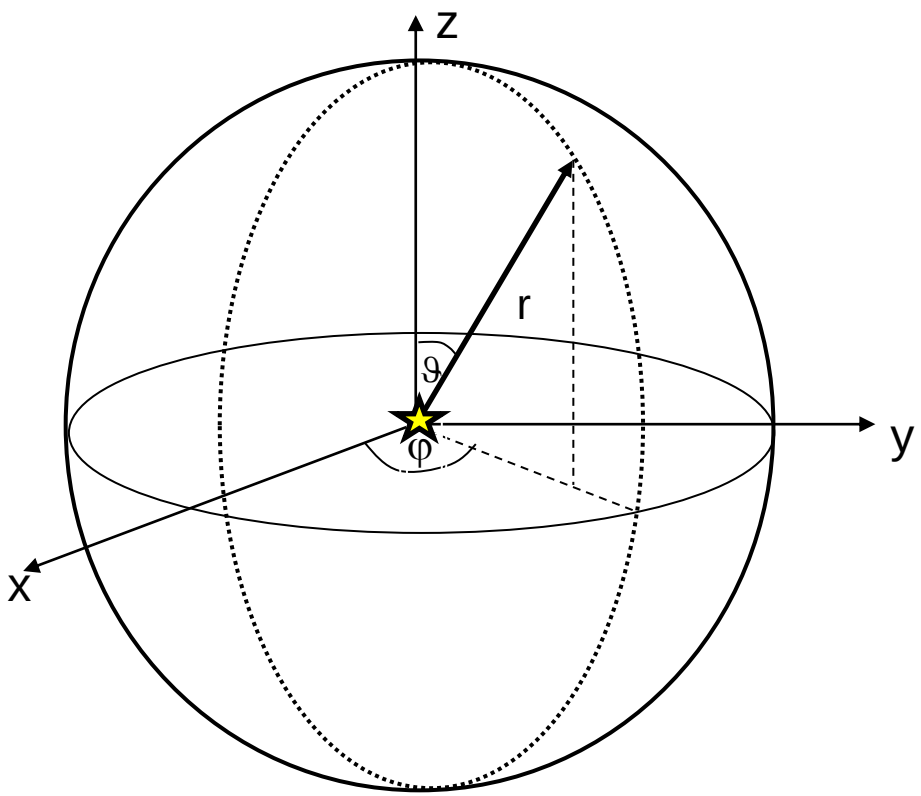
Gleichzeitigkeit im bewegten System (Diagramm)



Raum-Zeit-Diagramm bewegter Systeme



Konstanz der Lichtgeschwindigkeit



Gleichung für die Kugeloberfläche:

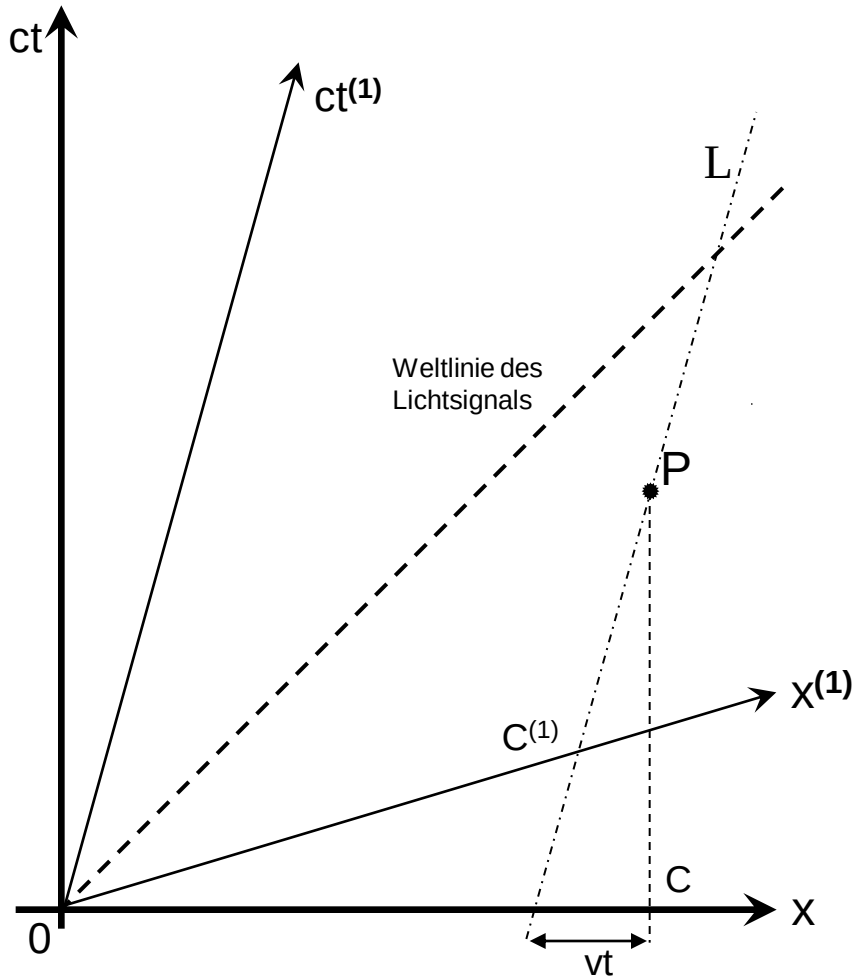
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Das Licht ausgehend vom Ursprung breitet sich kugelförmig aus ($r = c \cdot t$):

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

Ableitung der Lorentz-Transformation – 1



- Der Punkt P liegt auf einer Weltlinie L
  $$x^{(1)} = C^{(1)} ,$$
  die einen in $S^{(1)}$ ruhenden Punkt beschreibt.

- Diese Weltlinie L wird im (ruhenden) System S beschrieben durch
  $$x - vt = C .$$
  $C^{(1)}$ und C sind Konstanten.

- Beide Gleichungen stellen die selbe Weltlinie L dar; wir können also beide Gleichungen dividieren:

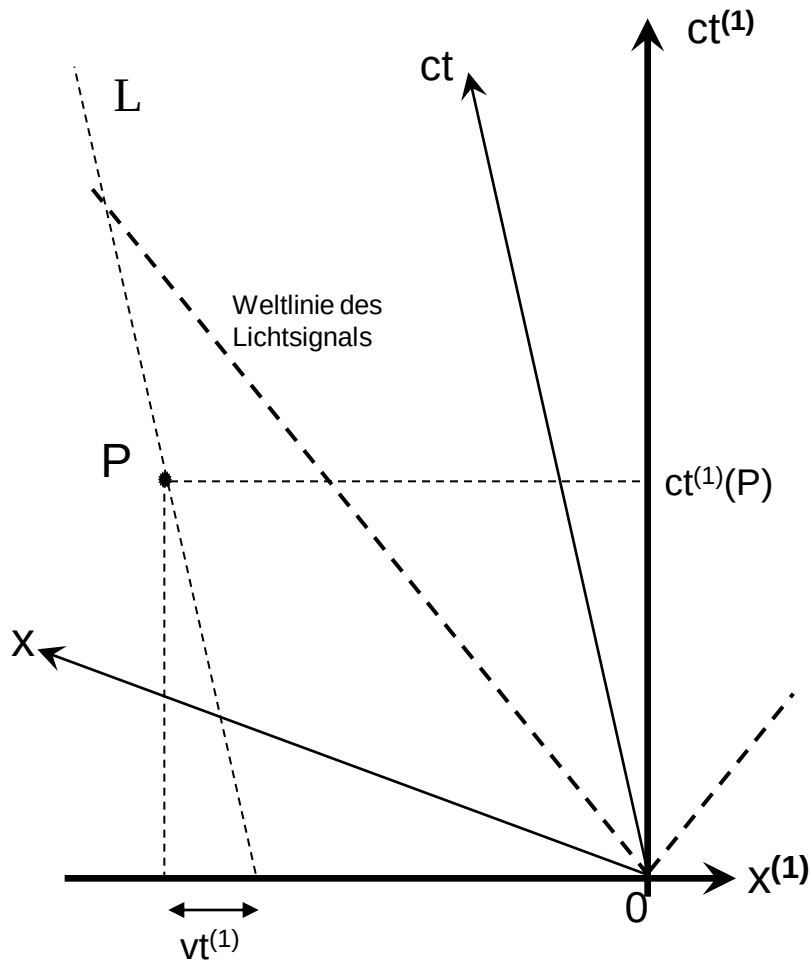
$$\frac{x - vt}{x^{(1)}} = \frac{C}{C^{(1)}} = \alpha$$

oder

$$\alpha x^{(1)} = x - vt$$

α hängt von der Geschwindigkeit v ab

Ableitung der Lorentz-Transformation – 2



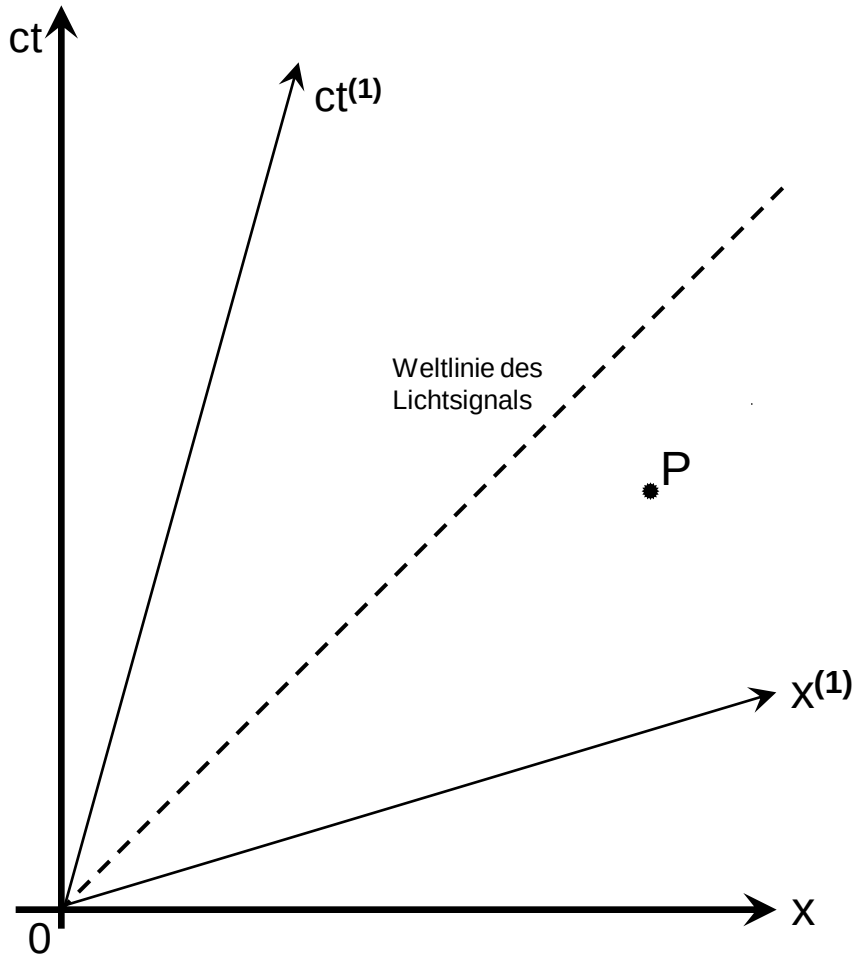
- Vom Standpunkt $S^{(1)}$ bewegt sich S mit der Geschwindigkeit –v. Nach dem Relativitätsprinzip muß daher gelten
  $$\alpha x = x^{(1)} + vt^{(1)}$$
  mit identischem α.

- Mit Hilfe der vorherigen Gleichung
  $$\alpha x^{(1)} = x - vt$$
  erhalten wir $t^{(1)}$ in Abhängigkeit von t:

$$\begin{aligned} v\,t^{(1)} &= \alpha\,x - x^{(1)} \\ &= \alpha\,x - \frac{x - v\,t}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\left(\alpha^2 - 1\right)x + v\,t\right] \end{aligned}$$

$$\alpha\,t^{(1)} = \frac{\alpha^2 - 1}{v}\,x + t$$

Ableitung der Lorentz-Transformation – 3



- Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich:

  $$x = ct \quad \text{und} \quad x^{(1)} = ct^{(1)}$$

- Dies in vorhergehenden Gleichungen für x und $x^{(1)}$
  $\alpha x^{(1)} = x - vt$ und $ax = x^{(1)} + vt^{(1)}$
  eingesetzt ergibt die Beziehung für α:

$$\alpha ct^{(1)} = ct - vt = (c - v)t$$

$$\alpha ct = ct^{(1)} + vt^{(1)} = (c + v)t^{(1)}$$

beide Gleichungen multipliziert

$$\alpha^2 c^2 t^{(1)} t = (c - v)(c + v)t^{(1)} t$$

$$\alpha^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \beta^2$$

Formeln der Lorentz-Transformation

$$x^{(1)} = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y^{(1)} = y$$

$$z^{(1)} = z$$

$$t^{(1)} = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x^{(1)} + v \cdot t^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

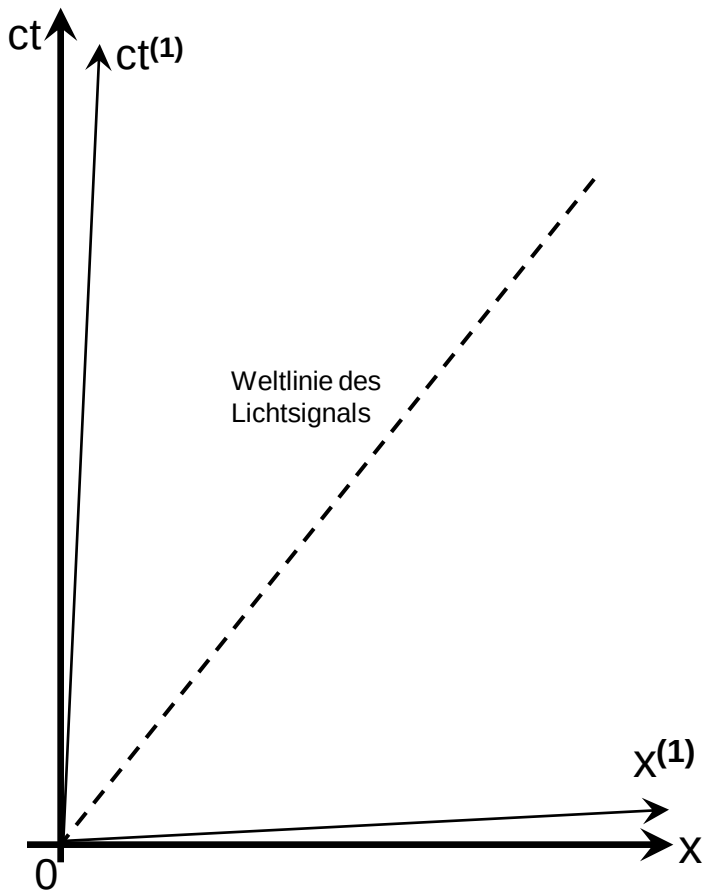
$$y = y^{(1)}$$

$$z = z^{(1)}$$

$$t = \frac{t^{(1)} + \frac{v}{c^2} \cdot x^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Häufig genutzte Abkürzung: $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Kleine Geschwindigkeiten



$$x^{(1)} = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y^{(1)} = y$$

$$z^{(1)} = z$$

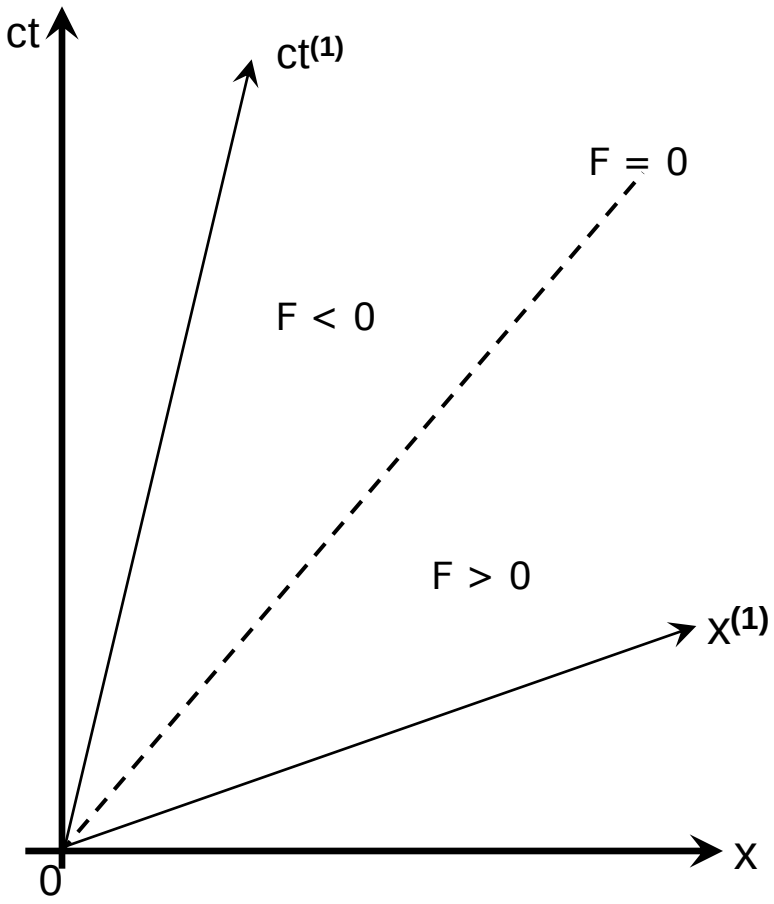
$$t^{(1)} = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Für kleine Geschwindigkeiten v«c kann β^2 gegen 1 vernachlässigt werden:

  $x^{(1)} = x - v \cdot t$
  $y^{(1)} = y$
  $z^{(1)} = z$
  $t^{(1)} = t$

- Die Galilei-Transformation!

Invarianz



- Der Ausdruck:

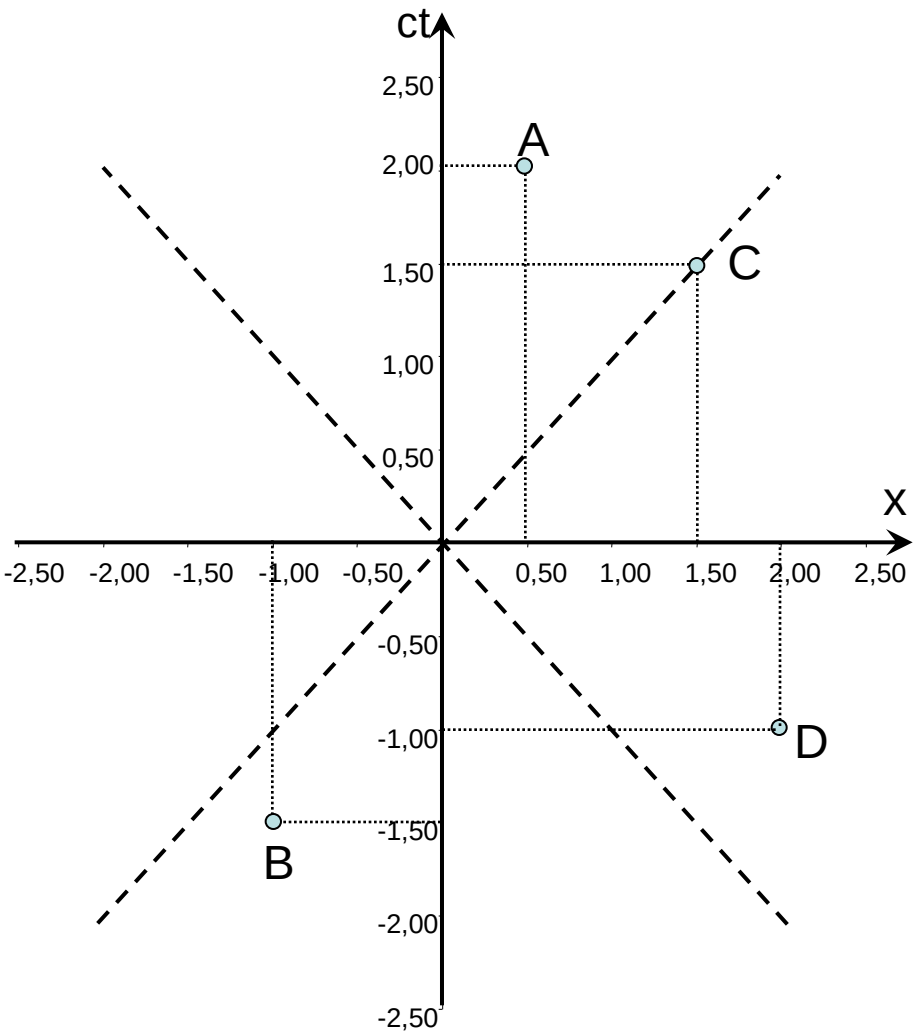
$$x^2 - (ct)^2 = F$$

ist invariant; es gilt:

$$x^2 - (ct)^2 = (x^{(1)})^2 - (ct^{(1)})^2$$

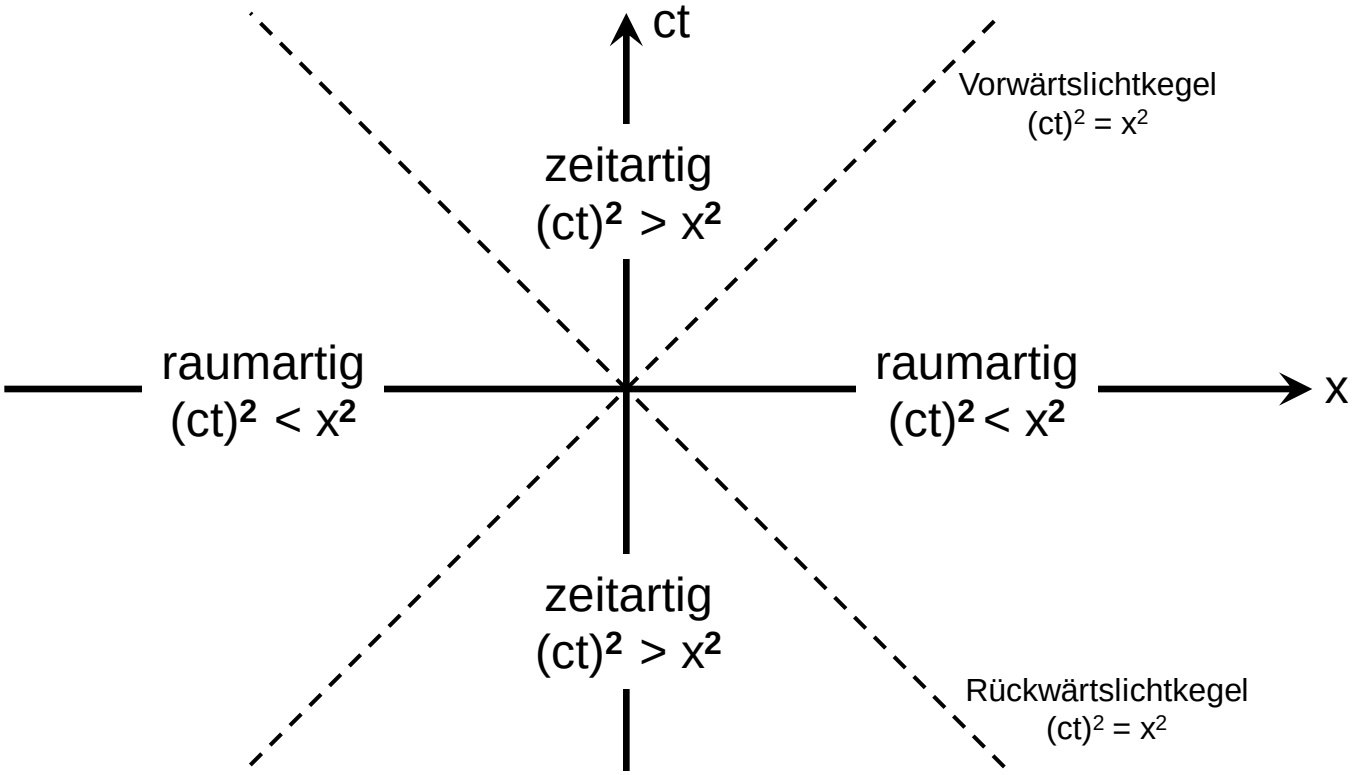
- zeitartig: $F < 0$
- raumartig: $F > 0$
- Lichtkegel: $F = 0$

Koordinaten im Raum-Zeit-Diagramm

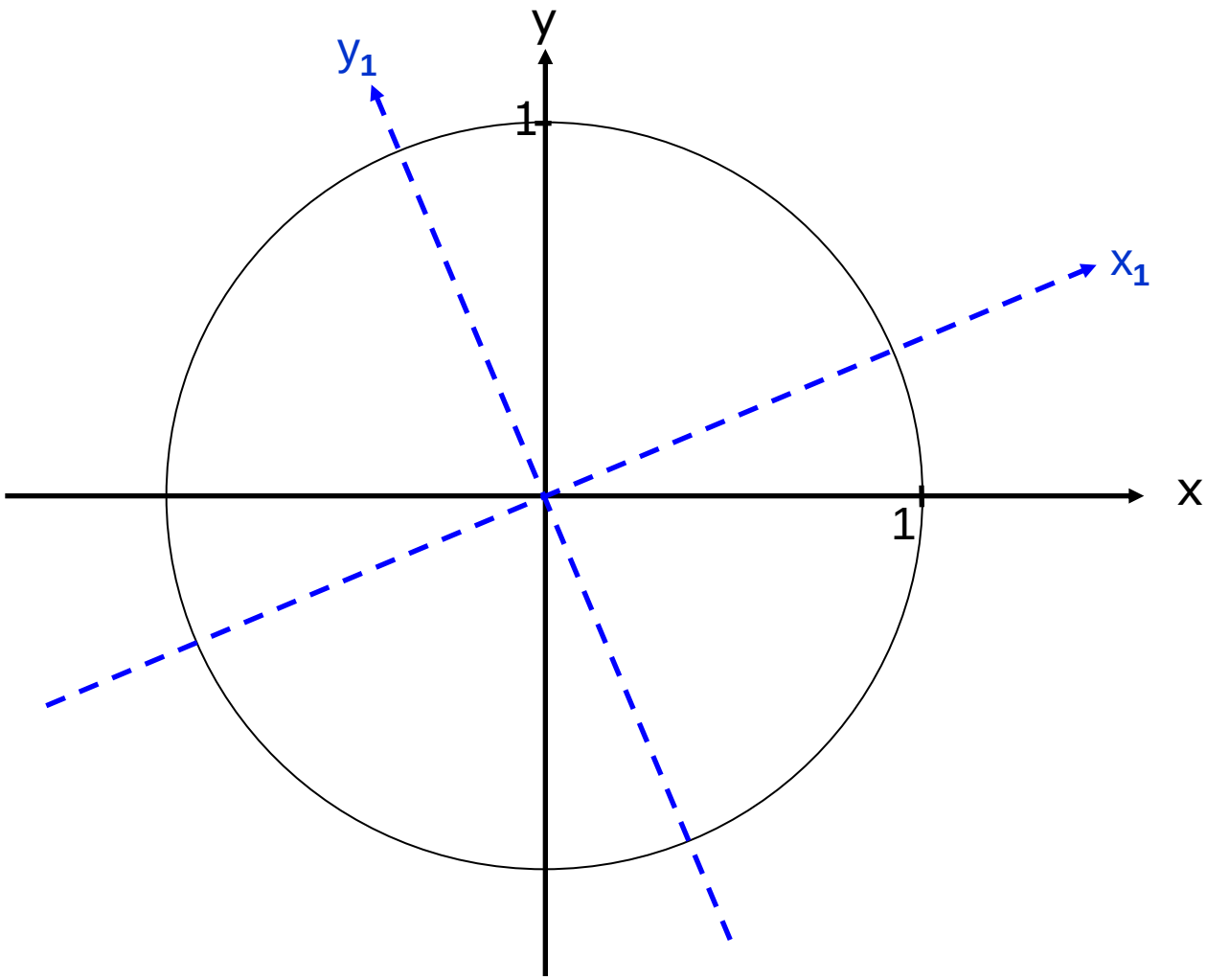


- $x^2 - (ct)^2 = F$
- A: $F = (0{,}5)^2 - (2{,}0)^2 = -3{,}75$
- B: $F = (-1{,}0)^2 - (-1{,}5)^2 = -1{,}25$
- C: $F = (1{,}5)^2 - (1{,}5)^2 = 0$
- D: $F = (2{,}0)^2 - (1{,}0)^2 = 3$

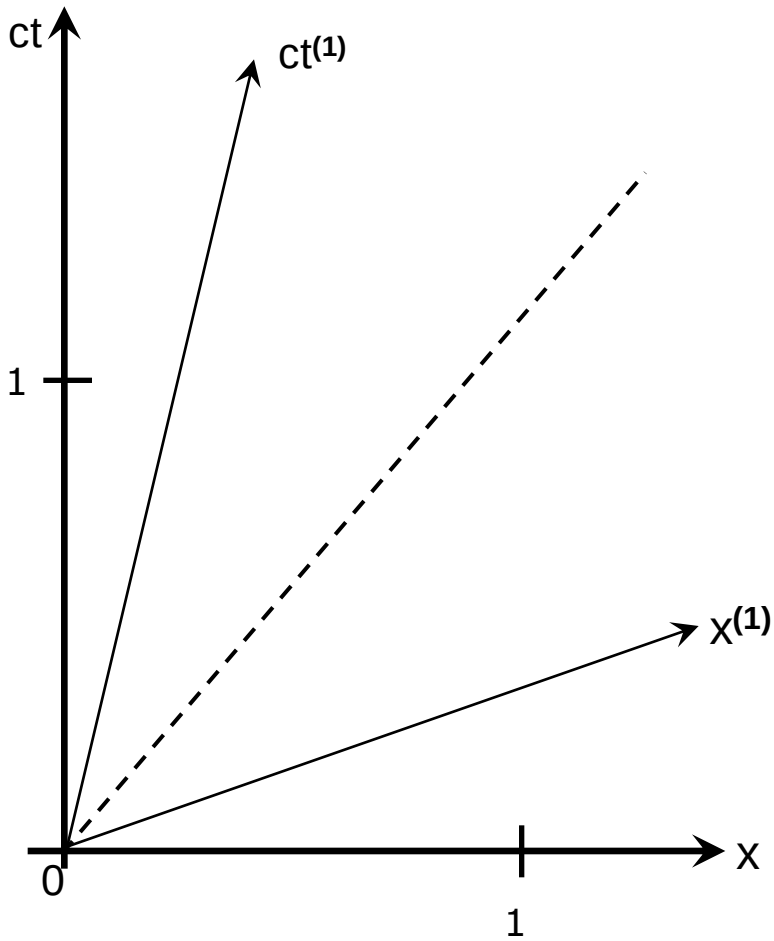
Raum- und zeitartig



Eichung von kartesischen Koordinatensystemen



Eichung von Lorentz-Koordinaten



- Wo liegen die Einheitspunkte
  $x^{(1)} = 1$ und $ct^{(1)} = 1$

- Die Lage der gesuchten Einheitspunkte wird bestimmt durch
  $x^2 - (ct)^2 = \pm 1$

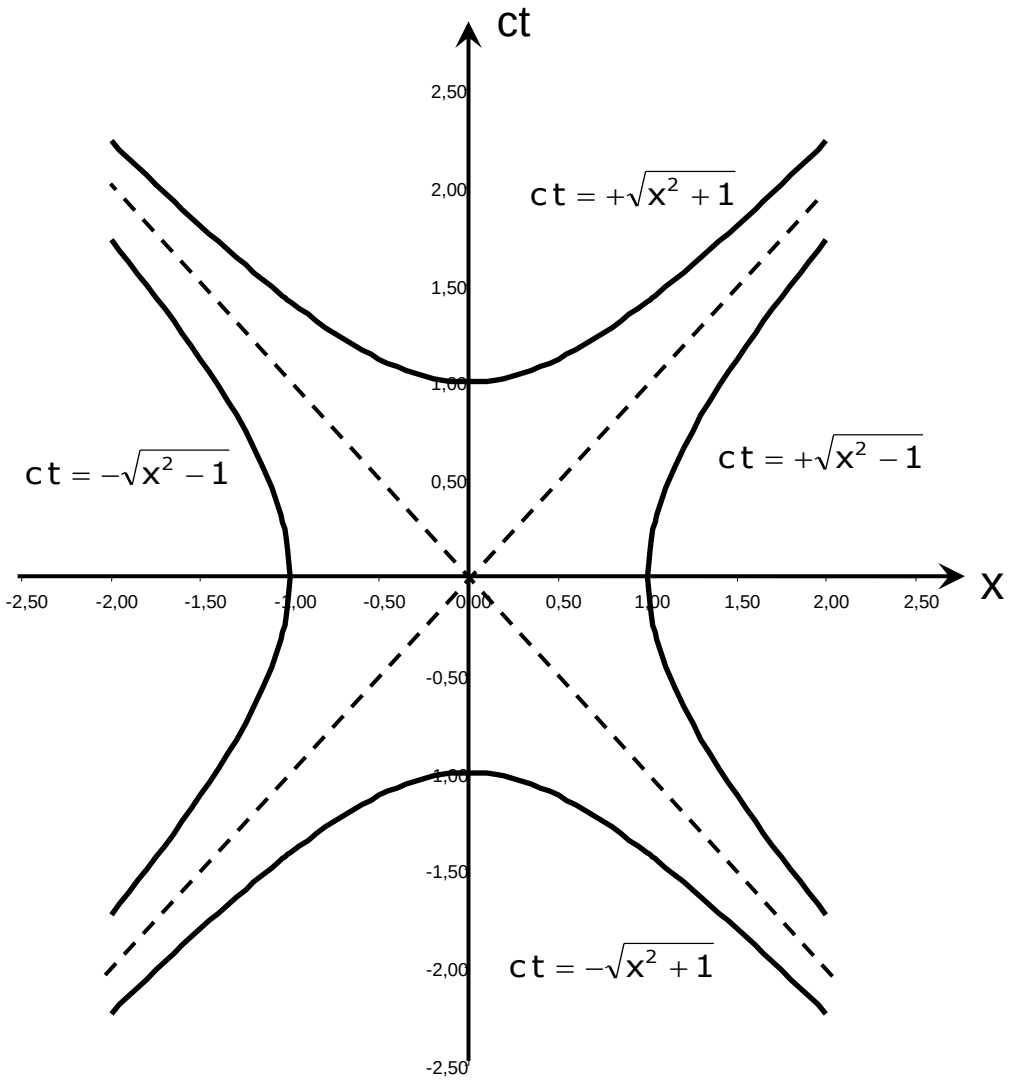
- Wegen der Invarianz ist der Ausdruck in beiden Koordinaten-systemen gleich.

- Orte der Einheitspunkte:

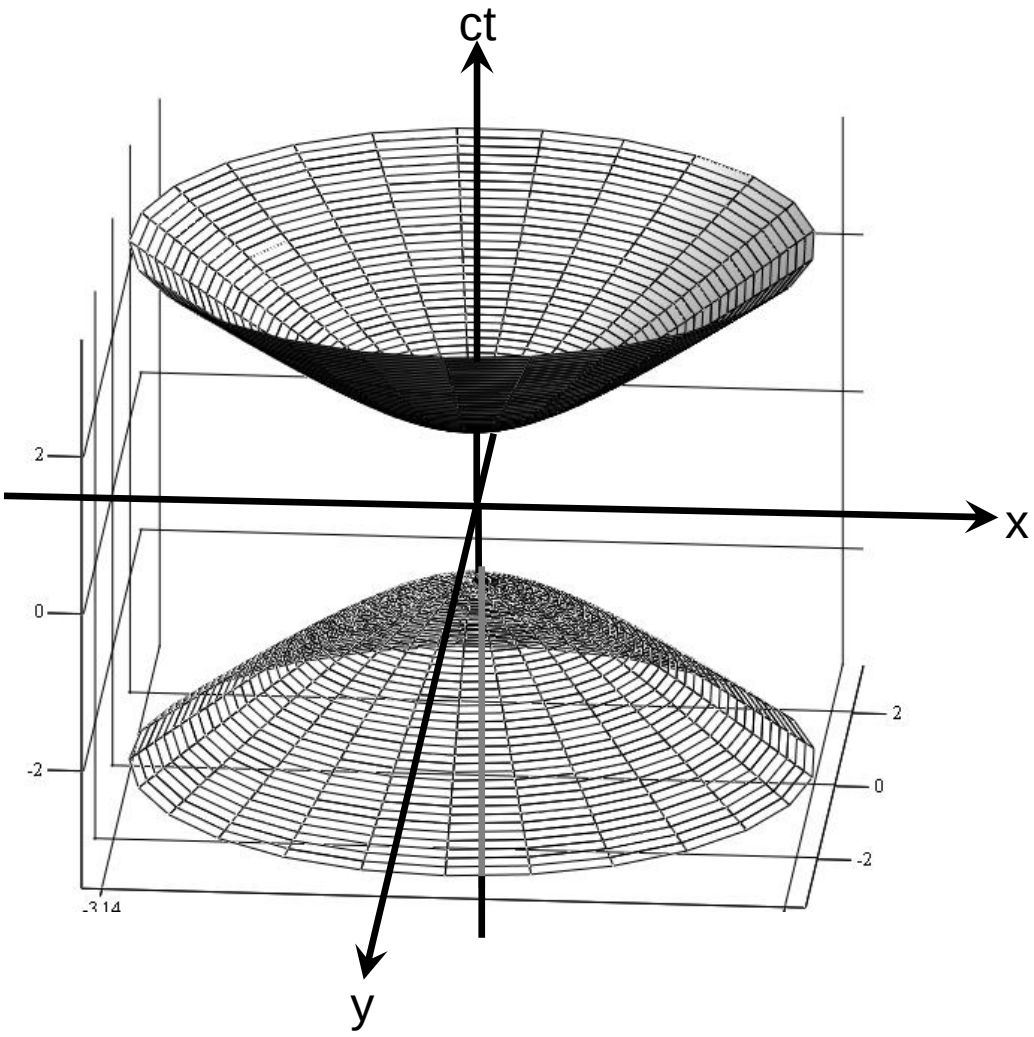
  zeitartig: $ct = \pm\sqrt{x^2 + 1}$

  raumartig: $ct = \pm\sqrt{x^2 - 1}$

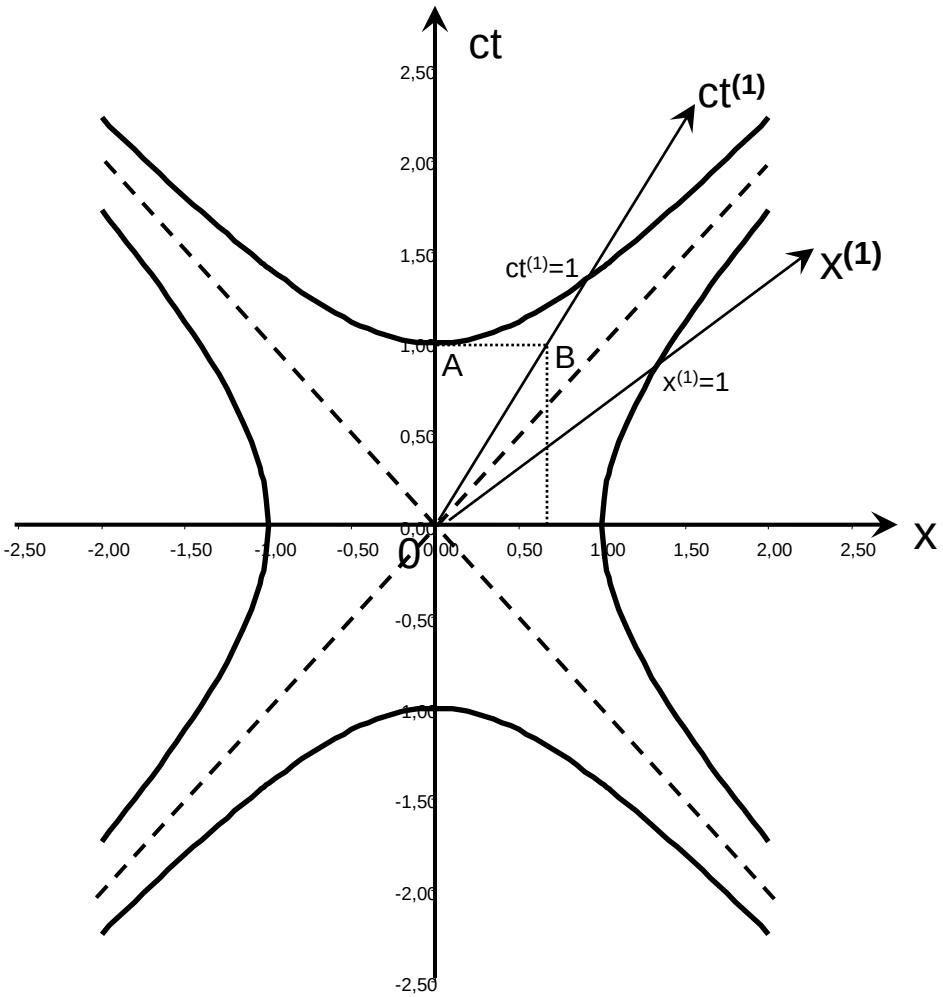
Eich-Hyperbeln



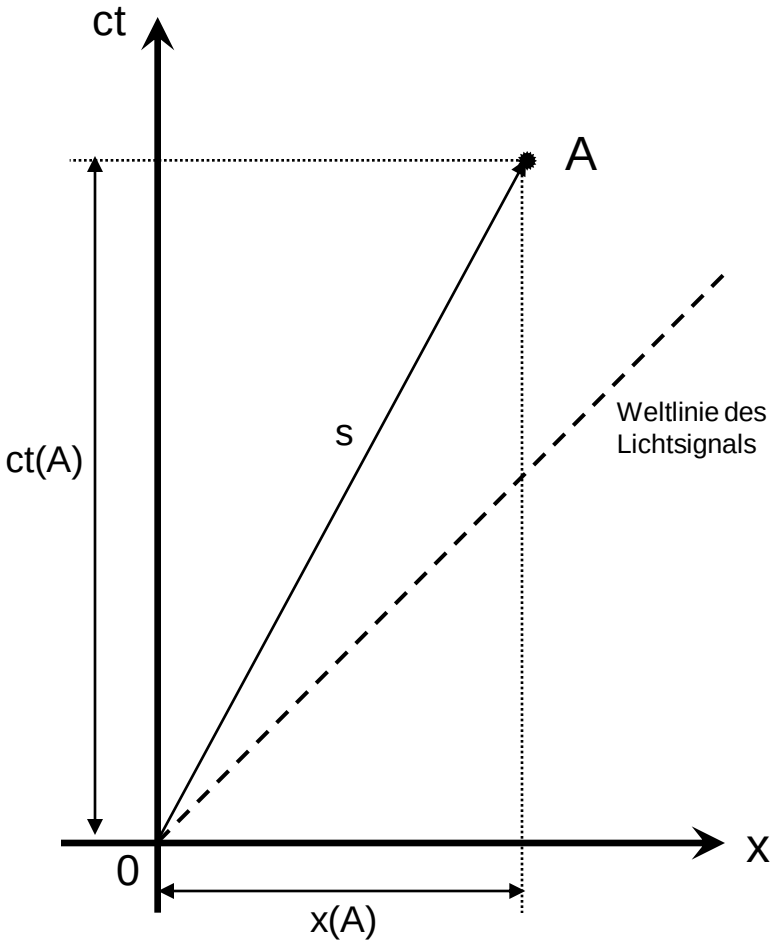
2-dimensionale Eichkurve



Festlegung der Einheiten



Pseudoeuklidische Geometrie



- Das Quadrat der Entfernung des Punktes A vom Ursprung sei im zeitartigen Bereich s^2 und nach Euklidischer Geometrie positiv.

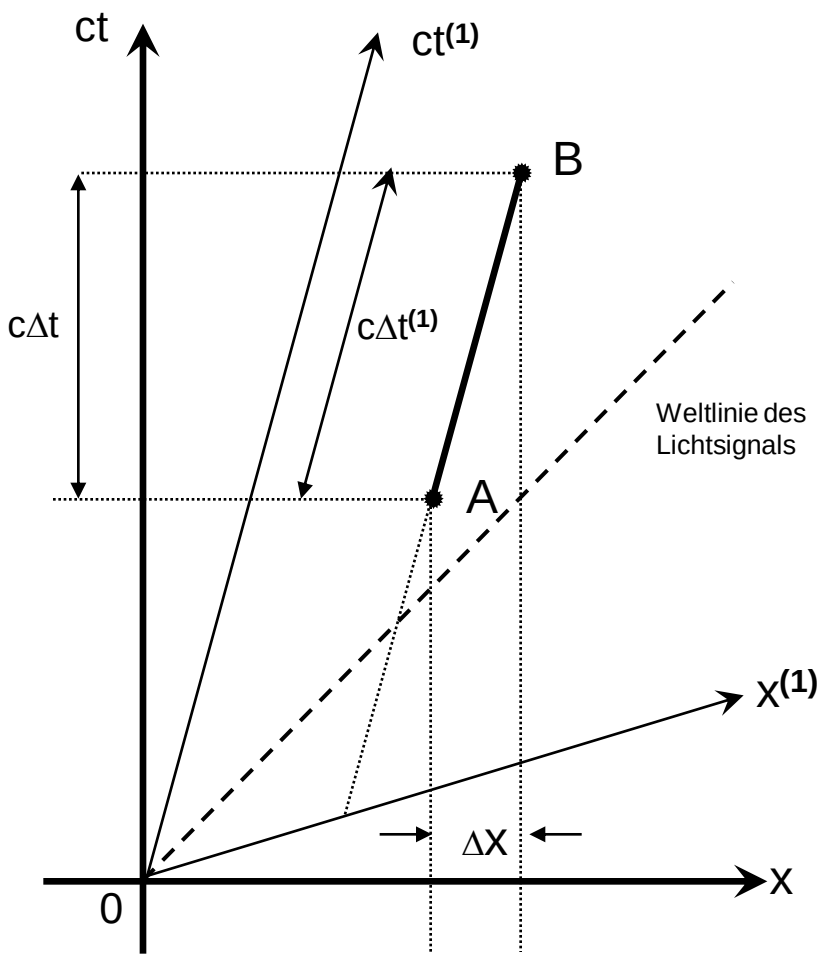
- Die Koordinaten des (zeitartigen) Punktes A sind aber gegeben durch den <u>negativen</u> Wert von F.

- Das positive s^2 muß also gleich –F sein; oder explizit:

  $$s^2 = (ct(A))^2 - (x(A))^2$$

- Es gilt also <u>nicht</u> der gewohnte „Pythagoras" der Euklidischen Geometrie, sondern es liegt eine *pseudoeuklidische* Geometrie vor.

Raum-zeitliche Entfernung



- Für die raum-zeitliche Entfernung von A nach B gilt

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

- Im mitbewegten System $S^{(1)}$ ist

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t^{(1)})^2 - (\Delta x^{(1)})^2$$

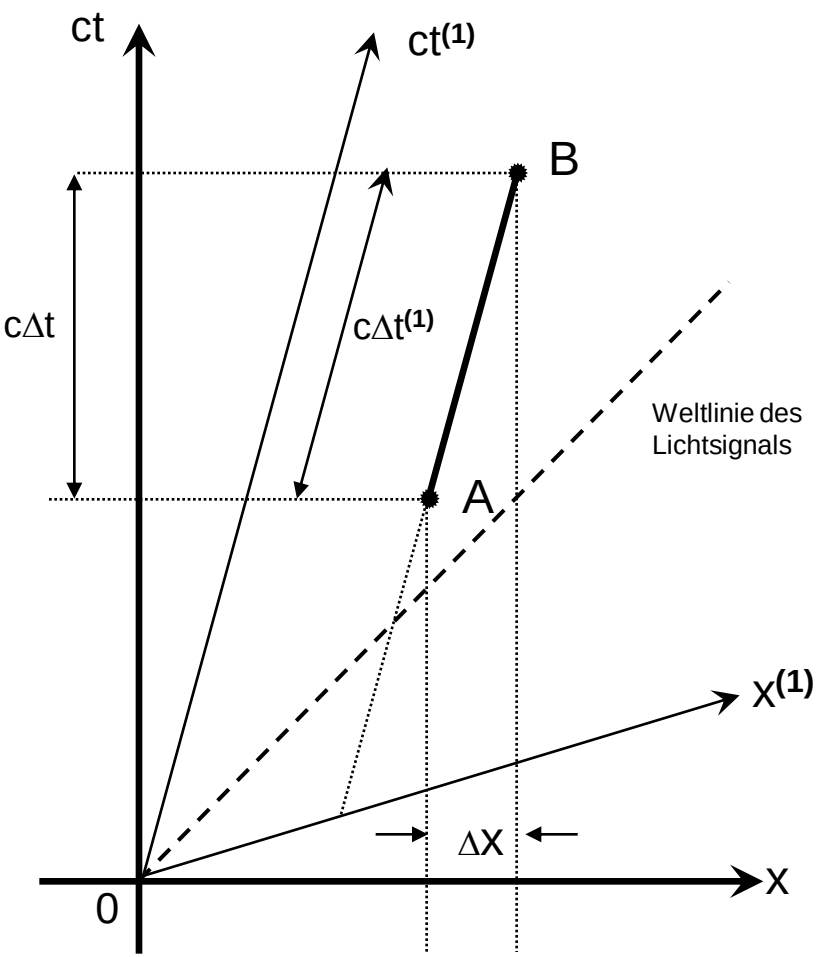
$$= (c\Delta t^{(1)})^2$$

- *Die raum-zeitliche Entfernung zweier Weltpunkte (Events) ist invariant.*

- Allgemein:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Die Eigenzeit



- Für die raum-zeitliche Entfernung von A nach B gilt
  $$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$
- Im mitbewegten System $S^{(1)}$ ist
  $$(\Delta s)^2 = (c\Delta t^{(1)})^2$$
- $(\Delta s)^2$ ist invariant, daher:
  $$(c\Delta t^{(1)})^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

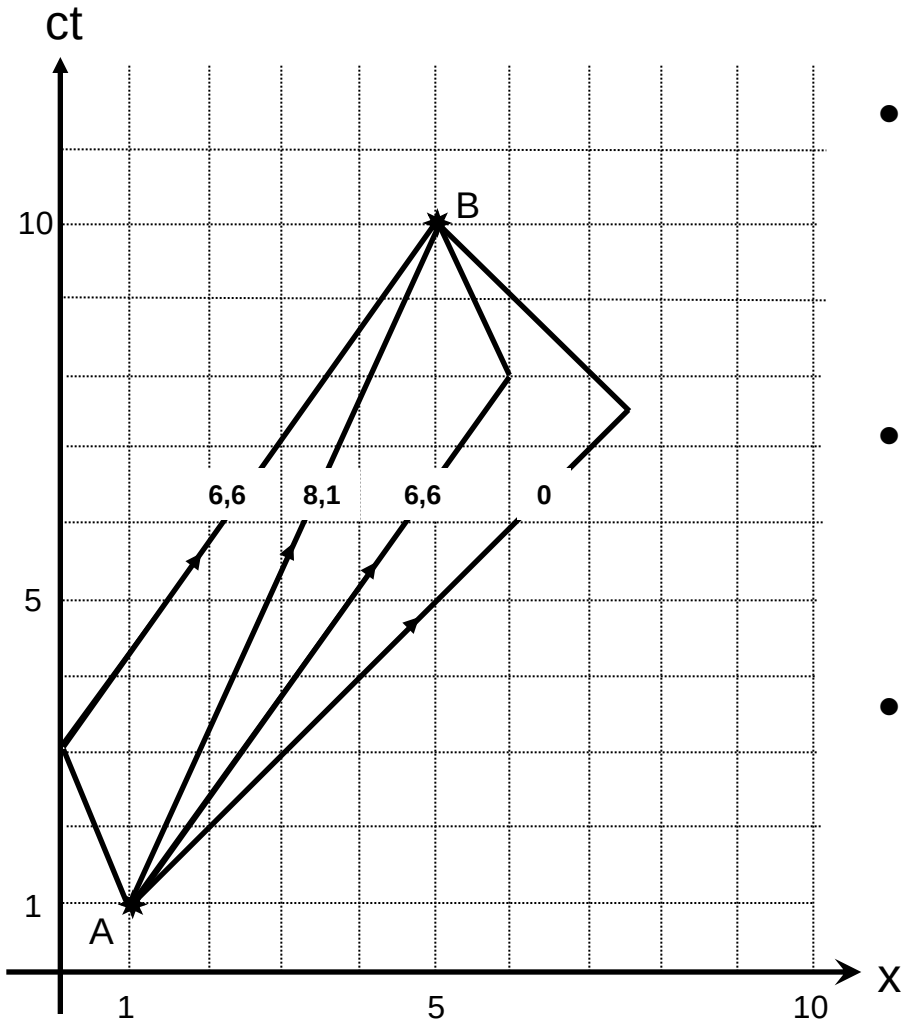
  $\Delta t^{(1)}$ ist die Eigenzeit ΔT_E im System $S^{(1)}$:

$$\Delta T_E = \frac{1}{c}\sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Für infinitesimale Größen:

$$dT_E = d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Raum-zeitliche Entfernung



- Die „direkte" raum-zeitliche Verbindung von A nach B hat die größte raum-zeitliche Länge, gemessen in Licht-sekunden.
- Andere Verbindungen zwischen A und B, haben trotz des „Umweges" durch Reflexion kürzere Längen.
- Die Weltlinie, die auf beiden Wegabschnitten mit Licht-geschwindigkeit durchlaufen wird, hat die raum-zeitliche Länge null.

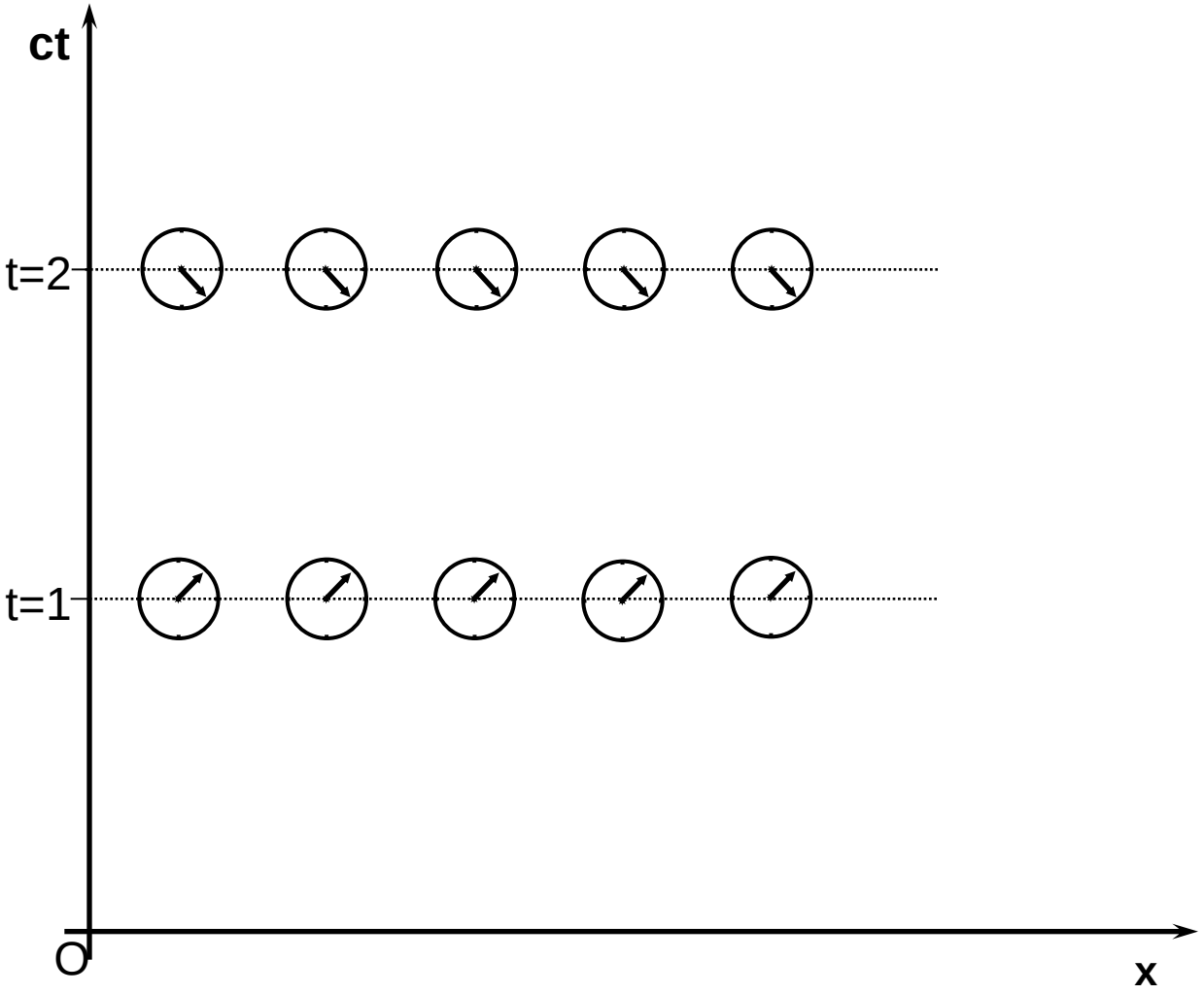
Inertialsystem in der Speziellen Relativitätstheorie

1. Die Entfernung zwischen einem Punkt P_1 mit den Koordinaten (x_1, y_1, z_1) und einem Punkt P_2 mit den Koordinaten (x_2, y_2, z_2) ist unabhängig von der Zeit.

2. Die Uhren, die in jedem (Raum-) Punkt des Koordinaten-systems angebracht sind, und die Zeit *t* anzeigen, sind synchronisiert.

3. Die Geometrie des Raumes ist bei jeder konstanten Zeit *t* Euklidisch.

Synchrone Uhren

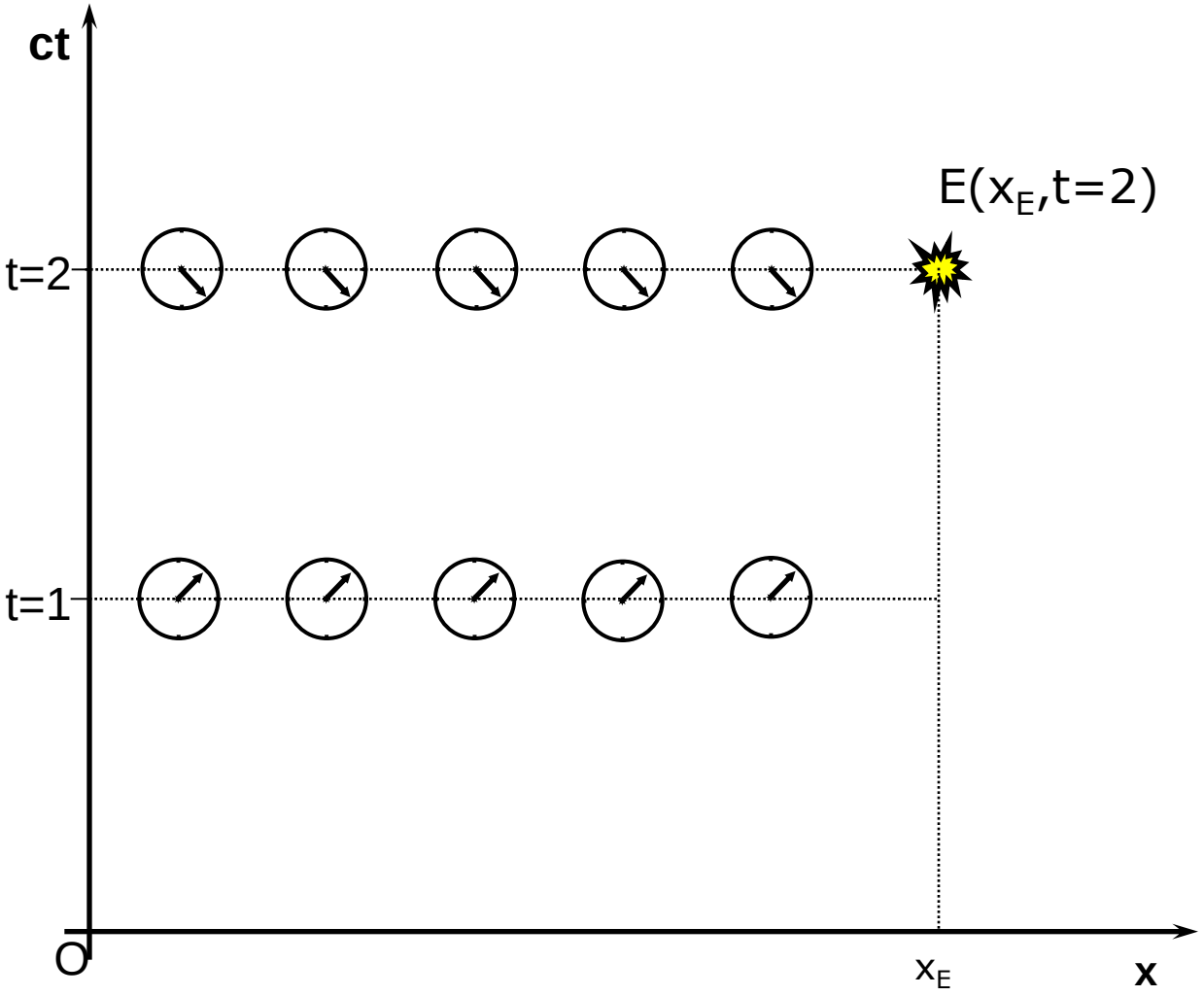


Der „Beobachter"

- Die „Beobachtung", die ein inertialer Beobachter macht, ist die Tatsache, daß er einem Ereignis *E* die Koordinaten (x , y, z) des Ortes und die Zeit *t*, abgelesen an dem Ort (x, y, z), zuweist.

- Es ist nicht die Zeit *t*, die ein menschlicher Bobachter in dem Raumpunkt (0, 0, 0) registriert, sobald er von dem Ereignis *E* erfährt.

- Wenn oft gesagt wird, „ein bewegter Stab erscheint verkürzt …", so ist immer ein <u>Meßvorgang</u> und keine visuelle Bobachtung gemeint.

- Die *visuelle Beobachtung* (Photo, Film …) ist von grundsätzlich anderer Art!

Synchrone Uhren